Centrale 1998 - Maths I - MP

Partie I

I.A) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$. Il en est de même de $f+g$ et fg et pour tout entier n

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(-1)^n (f+g)^{(n)} = (-1)^n f^{(n)} + (-1)^n g^{(n)} \qquad (-1)^n (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{(k)} (-1)^{n-k} g^{(n-k)}$$

Il découle de ces égalités que si f et g sont AM (resp. CM) alors $f+g$ et fg sont AM (resp CM).

I.B) Disons que f est $AM^{(p)}$ si pour tout n, $0 \le n \le p$ $f^{(n)} \geq 0$. Il résulte de la question précédente (via les identités) que si f et g sont $(AM)^{(p)}$ il en est de même de $f+g$ et fg. Ensuite f est AM si et seulement si f est $AM^{(p)}$ pour tout p. Pour finir il est clair que si f est AM alors f' est AM, et que si f' est AM alors f est AM si $f \geq 0$.

- Soit f une fonction AM, montrons que $\exp(f)$ est $AM^{(p)}$ pour tout p par récurrence sur p. C'est clair pour $p=0$ car $\exp f \geq 0$. On se suppose vrai à l'ordre p, alors $\exp f \geq 0$ et $(\exp f)' = f' e^f$ est $AM^{(p)}$, donc e^f est $AM^{(p+1)}$.

- On a bien prouver que e^f est AM si f est AM.

I.C) f est $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si g est $\mathcal{C}^\infty$ et $g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-b,-a[\ (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in]a,b[\ f^{(n)}(y) \geq 0$

I.D.1) $f = -\ln$ est positive sur $]0,1[$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ est negative sur $]0,1[$ $\quad (-1)^p f^{(p)}(x) = \dfrac{(p-1)!}{x^p}$ pour $p \geq 1$ donc $(-1)^n f^{(n)}$ est positive sur $]0,1[$, donc f est CM

I.D.2) $f \geq 0$ sur $]0,1[$. $\quad f'(x) = \dfrac{x}{1-x^2} f(x) \geq 0$ sur $]0,1[$

$(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 0$, puis en dérivant p fois

$(1-x^2) f^{(p+1)}(x) - (2p+1) x f^{(p)}(x) - p^2 f^{(p-1)}(x)$ (en utilisant leibniz)

$(1-x^2) f^{(p+1)}(x) = (2p+1) x f^{(p)}(x) + p^2 f^{(p-1)}(x)$

donc par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in]0,1[\quad f^{(p)}(x) \geq 0$

et f est AM.

I.D.3) arcsin est positif sur $]0,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc arcsin' est AM sur $]0,1[$. Par conséquent arcsin est AM sur $]0,1[$.

I.D.4) tan est positive sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\tan' = 1+\tan^2$ puisque 1 est AM sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ on montre par récurrence comme en I.B que tan est $AM^{(p)}$ pour tout p, donc AM sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

(On peut aussi prouver par récurrence que $\tan^{(p)} = P_p(\tan)$ où P_p est un polynôme à coefficients entiers positifs).

I.E.12) f est croissante sur $]a,b[$ (car $f' \geq 0$) minorée par 0 (car $f \geq 0$), donc elle admet une limite λ en a^+. La fonction $\tilde{f}$ prolongement de f par continuité est continue sur $[a,b[$ et $\tilde{f}_{|]a,b[} = f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus pour tout $p \geq 1$

$\lim\limits_{x \to a^+} (\tilde{f}_{|]a,b[})^{(p)}(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f^{(p)}(x)$ existe car $f^{(p)}$ est croissante ($f^{(p+1)} \geq 0$) minorée ($f^{(p)} \geq 0$). Donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On notera f la fonction $\tilde{f}$ comme le suggère l'énoncé.

Le résultat ne s'étend pas en b car si f est croissante rien ne dit qu'elle soit majorée. (par exemple tan sur $]0,\frac{\pi}{2}[$)

I.F.1) $|f| - f \geq 0$ donc $\mu(|f|-f) \geq 0$ $\mu(|f|) \geq \mu(f)$.

En changeant f en $-f$ $\mu(|f|) \geq -\mu(f)$ donc $\mu(|f|) \geq |\mu(f)|$

I.F.2) Même technique en utilisant $f_0 \|f\|_\infty - f \geq 0$.

I.F.3) $\tilde{\mu}(x) \geq 0$ car $e_x\ t \mapsto e^{-xt}$ est positive donc $\tilde{\mu}(x) = \mu(e_x) \geq 0$

Si $x \geq y$ $(t \mapsto e^{-yt} - e^{-xt})$ est ~~décroissante~~ positive.

$\mu(e_y - e_x) \geq 0$ donc $\mu(e_y) \geq \mu(e_x)$ $\tilde{\mu}(y) \geq \tilde{\mu}(x)$

$\tilde{\mu}$ est bien décroissante.

$\forall (x,y,t) \in [a,b]^3 \quad |e^{-yt} - e^{-xt}| \leq |y-x| \sup_{\substack{t\in[0,b] \\ z \in [a,b]}} |-t e^{-zt}| = M_{a,b} |y-x|$ (3)

C'est à dire $\quad |e_y - e_x| \leq M_{a,b} |y-x| f_0$

et finalement $\quad |\mu(e_y) - \mu(e_x)| = |\mu(e_y - e_x)| \leq \mu(|e_y - e_x|)$ (car μ est positive)

puis $\quad |\mu(e_y) - \mu(e_x)| \leq \mu(M_{a,b}|y-x| f_0)$ (car μ est croissante)

$$\leq |y-x| \, M_{a,b} \, \mu(f_0) = K\,|y-x|$$

et finalement $\quad \underline{|\tilde{\mu}(y) - \tilde{\mu}(x)| \leq K|y-x|}$

$\underline{\tilde{\mu} \text{ est lipschitzienne donc continue.}}$

<u>I.F.4.</u> $u \to e^u$ est de classe C^2 à valeurs réelles, en appliquant l'égalité de Taylor-Lagrange on peut donc écrire :

$$\underline{e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} e^c} \qquad (\text{car } \exp'' = \exp)$$

avec $c \in [\min(0,u), \max(0,u)]$. On aura $0 \leq e^c \leq e^{\max(0,u)} \leq e^{|u|}$

donc $\forall u \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$. En remplaçant u par $-u$ on obtient le résultat demandé.

- Revenons à l'étude de φ. Soit x dans $[a,b]$ et $y \neq x$, $y \in [a,b]$.

$\varphi(y) - \varphi(x) = \mu(t^n e^{-yt} - t^n e^{-xt}) = \mu(t^n e^{-xt}(e^{-(y-x)t} - 1))$

et

$$0 \leq t^n e^{-xt}\left(e^{-(y-x)t} - 1 + t(y-x)\right) \leq \frac{|t|^{n+2}(y-x)^2}{2} e^{|t||y-x| - x}$$

$\forall (x,y,t) \in [a,b]^3$

$$0 \leq t^n e^{-xt}\left(e^{-(y-x)t} - 1 + t(y-x)\right) \leq \frac{(|a|+|b|)^{n+2}}{2} e^{(|a|+|b|)|b-a| + |a|+|b|} (y-x)^2 \qquad (*)$$

$$0 \leq t^n e^{-xt}\left(e^{-(y-x)t} - 1 + t(y-x)\right) \leq K(y-x)^2$$

En appliquant μ on aura

$$0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) + (y-x)\,\mu(e_{n+1,x}) \leq K\mu(f_0)(y-x)^2$$

C'est à dire $\quad \varphi(y) = \varphi(x) - (y-x)\,\mu(e_{n+1,x}) + o((y-x)^2)$

Ce qui veut exactement dire que φ est dérivable en x, de dérivée $-\mu(e_{n+1,x})$. Cette dérivée est négative car $e_{n+1,x}$ est positive et μ est positive. Donc φ est décroissante.

PS : la majoration $(*)$ n'est pas très bonne. $0 \leq a < b$, on peut prendre $K = \frac{b e^{b(b-a)}}{2}$.

I. F.5) Posons $\varphi_n(x) = \mu(e_{n,x})$, alors $\varphi_0 = \tilde{\mu}$ et on montre alors aisément par récurrence que $\tilde{\mu}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\tilde{\mu}^{(n)} = (-1)^n \varphi_n$. Puisque $e_{n,x} \geq 0$ et $\mu \geq 0$ $\forall n$ $\varphi_n \geq 0$ donc $\tilde{\mu}$ est CM.

I. F.6) - $\mu_1(f) = f(c)$ $c \in [a,b]$

$\tilde{\mu}_1 = e^{-xc}$.

- $\mu_2(f) = \int_a^b f(t)\,dt$

$$\tilde{\mu}_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ b-a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ (et dans le cas $a=c$)

Partie II

II A.1) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral on peut écrire $R_n(f,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

On effectue le changement de variable $t = xu$.

$$R_n(f,x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,du.$$

$$\forall x \in]0,b[\quad R_n(f,x)/x^n = x \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,du.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est croissante et $\frac{(1-u)^n}{n!}$ positive, pour tout u de $]0,1[$ $x \mapsto \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)$ est croissante.

Par croissance de l'intégrale $x \mapsto \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,dx$ est croissante, et positive car $f^{(n+1)}$ l'est. Puisque $x \mapsto x$ est croissante positive sur $]0,b[$ il en résulte que $\frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante positive sur $]0,b[$.

En prenant $x = \frac{b}{2}$ $\quad 0 \leq \frac{R_n(f,x)}{x^n} \leq x \times \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(u\frac{b}{2}\right)du$ si $x \leq \frac{b}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

(Si $b = +\infty$, prendre $x=1$ au lieu de $\frac{b}{2}$)

II A.2) $\forall x \in [0,b[$ $\quad R_n(f,x) \geq 0$ donc

$$\forall n \quad f(c) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k \leq f(x).$$

les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k$

sont majorées, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k$ est donc convergente et sa somme $g(x)$ vérifie $g(x) \leq f(x)$.

II.A.3) Soit ~~$0 \leq x < y < b$~~, x dans $]0, b[$, soit $y = \frac{x+b}{2}$ par exemple ($x+1$ si $b = +\infty$) alors $x < y < b$.

Or a $f(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} y^k + R_n(b, y)$.

donc $R_n(b,y) \leq f(y)$.

Ensuite $\frac{R_n(b,x)}{x^n} \leqslant \frac{R_n(b,y)}{y^n}$ donc $0 \leq R_n(b,x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} R_n(b,x) = 0$ et finalement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k .$$

II.A.4) Soit $r = \min(b, -a)$. $h_1 : x \mapsto f(x) + f(-x)$ et $h_2(x) \mapsto f(x) - f(-x)$ sont définies et de classe C^∞ sur $]-r, r[$.

Toutes les dérivées $2n$-ièmes de h_1 sont positives, or h_1 est paire donc pour tout n $h^{(2n+1)}(0) = 0$. Mais puisque $h_1^{(2n+2)} \geqslant 0$ $h_1^{(2n+1)}$ est croissante sur $[0, r[$ donc $h_1^{(2n+1)}$ est positive sur $[0, r[$. Finalement h_1 est AM sur $[0, r[$

donc $\forall x \in [0, r[$ $h_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_1^{(n)}(0)}{n!} x^n$

On raisonne de même pour h_2 en inversant les parités h_2

$\forall x \in [0, r[$ $h_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_2^{(n)}(0)}{n!} x^n$

En sommant on aura $\forall x \in [0, r[$. $2f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_1^{(n)}(0) + h_2^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

En soustrayant $\forall x \in [0, r[$ $2f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_1^{(n)}(0) - h_2^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

soit $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} (-x)^n$

$\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. et f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

II B) On appelle toujours f la fonction prolongée

on pose $g(x) = f(x+a)$, g est AM sur $[0, b-a[$

Le résultat du II, A) permet d'affirmer.

$$\forall x \in [0, b-a[\quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\forall y \in [a, b[\quad f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (y-a)^n$$

II C) - Si f est nulle en x_0, alors puisqu'elle est positive croissante on aura $\forall x \in]a, x_0]$ $f(x) = 0$. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x_0) = 0$

Donc d'après la question précédente $\forall y \in [a, b[$ $f(y) = 0$

donc f est nulle sur $]a, b[$.

- Si $f^{(p)}(x_0) = 0$ alors $f^{(p)} = 0$ et f est un polynôme de degré au plus $p-1$.

Écrivons ce polynôme sous la forme $f = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x-a)^k$

Puisque qu'on peut prolonger f est une fonction AM sur $[a, b[$.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \geq 0.$$

Réciproquement si $f = x \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x-a)^k$ avec $\forall k$ $a_k \geq 0$ alors f est AM sur $]a, b[$ et il existe x_0 tel que $x_0 \in]a, b[$ et $f^{(p)}(x_0) = 0$.

Partie III

III.A) f est définie sur $]a, b[$, donc $T_h(f)$ est définie sur ~~...~~ $]a-h, b-h[$, donc $\Delta_h(f)$ est définie sur $]a, b[\cap]a-h, b-h[=]a, b-h[$.

Par récurrence $\Delta_h^n(f)$ est définie sur $]a, b-nh[$.

III. B) L'égalité se démontre comme la formule de Leibniz

Elle est vraie pour $n=0$, et $n=1$, par définition de Δ_h. On la suppose vraie à l'ordre n (≥ 1).

$$\Delta^{n+1}(f)(x) = \Delta(\Delta^n(f))(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh+h) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k+1} f(x+kh) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

On utilise alors pour conclure $C_n^0 = C_{n+1}^0 \quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \quad C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$

~~III C) Soit X(h)~~ = $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \quad \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

III. C) Soit $X(h) = \Delta_h^{n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x+kh)$

$$X'(h) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \times k \binom{n+1}{k} f'(x+kh)$$

Or $\quad k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1} \quad$ si $k \geq 1$

Donc, après un décalage d'indice :

$$X'(h) = (n+1)\, \Delta_h^n (f')(x+h) \geq 0 \quad (\text{si } \Delta_h^n(f') \geq 0)$$

or $X(0) = 0$ donc $X(h) \geq 0$ si $\Delta_h^n(f') \geq 0$

Or $\Delta_h^0 f = f$, donc pour toute fonction AM $\Delta_h^0 f \geq 0$, on en déduit par récurrence que, pour toute fonction f AM $\Delta_h^n(f) \geq 0$

PS. Justification de $X(0) = 0$ $\quad X(0) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)\binom{n+1}{k} f(x) = (1-1)^{n+1} f(x) = 0$ car $n+1 \geq 0$.

III. D 1) $\forall h \in \mathbb{R}^{*+} \quad \Delta_h^0(f)(x) \geq 0$ donc $\forall x \in [0, b[\quad f(x) \geq 0$ donc f est positive.

En prenant $n = 1$ $\forall h \geq 0 \, \forall x \in [0, b-h[\quad f(x+h) - f(x) \geq 0$

donc f est croissante $\quad (\forall (x,y) \in [0, b[\quad x < y \quad \exists h > 0 \quad y = x+h)$

III. D.2) $\psi(t) = (e^t - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kt}$

D'autre part $\forall t \neq 0 \quad \dfrac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(n+1)!}$, donc

$\sum_{n \geq 0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(n+1)!}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et réalise un prolongement de $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$,

donc $\psi(t) = t^n \, \theta(t)$ où θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Si $0 \leq p \leq n \quad \psi^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \dfrac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \theta^{(k)}(t)$

donc $\quad \psi^{(p)}(0) = 0 \quad$ si $p < n$

Or $\quad \psi^{(p)}(0) = p! \, S_p \quad$ donc $\quad S_j = 0 \quad$ si $0 \leq j < n$

$\varphi^{(n)}(c) = n! S_n = n! \theta(c) = n!$ donc $S_n = 1$.

III.D.3) On peut écrire.

$$f(x+kh) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{k^j}{j!} h^j f^{(j)}(x) \right) + o(h^n)$$

donc

$$\Delta_h^n (f)(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} S_j h^j f_j(x) \right) + o(h^n)$$

en divisant par h^n et en faisant tendre h vers 0

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta^n_h (f)(x)}{h^n} \geqslant 0.$$

Donc si f est TM alors f est AM.