Polytechnique MP 2015 Mathématiques B

Première partie

1 a) • Soit $y>0$, posons $f_y : t \mapsto e^{-t} t^{y-1}$

- f_y est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
- $f_y(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-\frac{t}{2}})$ et $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f_y est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- $f_y(t) \underset{0}{\sim} t^{y-1}$ et $t \mapsto t^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $y-1>-1$, donc f_y est intégrable sur $]0,1]$

En conclusion f_y est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\Gamma(y)=\int_0^{+\infty} f_y(t)dt$ est bien défini.

• On effectue une intégration par parties pour évaluer $\Gamma(y+1)$.

$$\Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} t^y e^{-t} dt = \underbrace{\left[-t^y e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + y \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt}_{=\Gamma(y)}$$

- $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ si $y>0$

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$

Puis par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$ car $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. (Si n est entier)

1.b) • ~~$\forall y>0$ ...~~ $\forall y>0 \quad \Gamma(y) = \frac{1}{y}\Gamma(y+1)$

$$\forall y>0 \quad \Gamma(y) = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^y dy = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} e^{-(t-y\ln t)} dt$$

• On effectue dans l'intégrale de l'expression précédent le changement de variable $t=y(1+s)$. Il vient immédiatement

$$\forall y>0 \quad \Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y(s-\ln(1+s))} ds = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\varphi(s)} ds$$

2

2a) • $\forall x>0 \quad t \mapsto e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha}$ est continue sur $[\delta, +\infty[$

• $e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2x}}\right)$ et $t \mapsto e^{-\frac{t}{2x}}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$.

• $$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha}\, dt \underset{t=xu}{=} x^{\alpha+1} \int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha}\, du.$$

Or $e^{-u} u^{\alpha} \underset{+\infty}{=} e^{-\frac{u}{2}}$ et $u \mapsto e^{-\frac{u}{2}}$ est intégrable et positive. L'intégration des relations de comparaison

donc $$\int_{y}^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha}\, du = o\left(\int_{y}^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}}\, du\right) = o\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)$$
$$= 2e^{-\frac{y}{2}}$$

donc $$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha}\, dt \underset{x\to 0^+}{=} x^{\alpha+1} e^{-\frac{\delta}{2x}} = o(x^{n}),$$ par croissance comparée en $+\infty$ de e^{-y} et $y^{-n+\alpha+1}$.

• $\forall t \geq 1 \quad |p_N(t)| \leq c\, t^{K} + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\, t^{\frac{k+\lambda-N}{N}}$

donc $$p_N(t) \underset{+\infty}{=} O\left(t^{\underbrace{\max\left(K, \frac{N+\lambda-N}{N}\right)}_{=K_1}}\right)$$

donc $\forall \delta > 0 \quad \exists\, c_{\delta} \in \mathbb{R}^{+} \quad \forall t \geq \delta \quad |p_N(t)| \leq c_{\delta}\, t^{K_1}$

$$\forall x>0 \quad \left|\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x} p_N(t)\, dt\right| \leq c_{\delta} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} |p_N(t)|\, dt$$
$$\leq c_{\delta} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{K_1}\, dt$$
$$\underset{0^+}{=} o(x^{n}) \quad (\text{si } n \in \mathbb{N})$$

On a bien $\forall \delta > 0 \quad \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\, dt \underset{0^+}{=} o(x^{n})$

2.b) $p_N(t) \underset{0^+}{=} o\left(t^{\frac{N+\lambda-\nu}{\nu}}\right)$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in]0,\delta[\quad |p_N(t)| \leq \varepsilon\, t^{\frac{N+\lambda-\nu}{\nu}}$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons un tel δ.

$$\forall x > 0 \quad \left|\int_0^\delta e^{-t/x} p_N(t)\,dt\right| \leq \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \varepsilon\, t^{\frac{N+\lambda}{\nu}-1}\,dt \leq \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\frac{N+\lambda}{\nu}-1}\,dt$$

$$\forall x > 0 \quad \left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt\right| \leq \varepsilon\, \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\nu}\right) x^{\frac{N+\lambda}{\nu}} \quad \text{(en faisant } t = xu\text{)}$$

2.c) Soit $\alpha > 0$, choisissons ε tel que $\varepsilon\, \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\nu}\right) < \frac{\alpha}{2}$.

et un entier n avec $n \geq \frac{N+\lambda}{\nu}$.

+ Il existe $\delta > 0$, que nous fixons, tel que

$$\forall x > 0 \quad \left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt\right| \leq \frac{\alpha}{2} x^{\frac{N+\lambda}{\nu}} \quad \text{(Q 2.b))}$$

+ δ étant fixé, d'après 2.a), il existe η tel que

$$\forall x \in]0,\eta[\quad \left|\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt\right| \leq \frac{\alpha}{2} x^n \leq \frac{\alpha}{2} x^{\frac{N+\lambda}{\nu}} \quad \text{(en prenant } \eta < 1\text{)}$$

Par sommation, on en déduit

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]0,\eta[\quad \left|\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt\right| \leq \alpha\, x^{\frac{N+\lambda}{\nu}}.$$

c'est à dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt \underset{0^+}{=} o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\nu}}\right)$

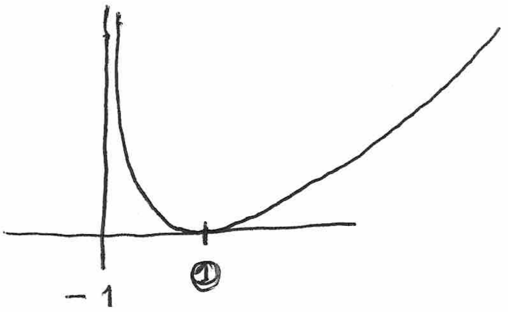
2.d) $\forall k \in [\![0,N]\!] \ \forall x > 0 \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\frac{k+\lambda-\nu}{\nu}}\,dt$ existe et vaut $\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\nu}\right) x^{\frac{k+\lambda}{\nu}}$. (vu en 2.b))

Donc par linéarité de l'intégrale, $F(x)$ existe

et $$F(x) = \sum_{k=0}^N a_k\, \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\nu}\right) x^{\frac{k+\lambda}{\nu}} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} p_N(t)\,dt$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^N a_k\, \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\nu}\right) x^{\frac{k+\lambda}{\nu}} + o\left(x^{\frac{k+\lambda}{\nu}}\right)$$

3a)



φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$

$$\varphi'(s) = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s}.$$

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-1,0[$. strictement croissante sur $]0,+\infty[$. $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{s\to -1} \varphi(s) = +\infty$

$\lim\limits_{s\to+\infty} \varphi(s) = +\infty$.

Le théorème de la bijection permet d'affirmer que φ réalise une bijection de $]-1,0[$ sur $]0,+\infty[$ et de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. (φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée ne s'annulant sur aucun de ces intervalles on peut aussi affirmer que les bijections réciproques sont de classe $\mathcal{C}^1$).

3b) $\forall s \in]-1,1[\quad \ln(1+s) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} s^k}{k}$.

On obtient immédiatement $\forall s \in]-1,1[\quad \varphi(s) = s^2 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k s^k}{k+2}$.

(Faire $k \leftarrow k+2$ dans $\varphi(s) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k s^k}{k}$).

3c) Pour déterminer les b_i et les c_i, on va composer les développements limités naturellement associés aux développements en série entière et utiliser l'unicité du développement ~~en série~~ limité.

$$\varphi(s) = s^2\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{3} + \frac{s^2}{4} + o(s^2)\right)$$

$$A(q) = \varphi(a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + o(q^3))$$

$$= q^2(a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + o(q^2))^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(a_1 q + a_2 q^2) + \frac{1}{4} a_1^2 q^2 + o(q^2)\right)$$

$$= q^2(a_1^2 + 2a_1 a_2 q + (2a_1 a_3 + a_2^2) q^2 + o(q^2))\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} a_1 q + \left(\frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{3}a_2\right) q^2 + o(q^2)\right)$$

$$A(q) = q^2\left(\frac{a_1^2}{2} + \left(a_1 a_2 - \frac{a_1^3}{3}\right) q + \left(a_1 a_3 + \frac{1}{2} a_2^2 - a_1^2 a_2 + \frac{1}{4} a_1^4\right) q^2 + o(q^2)\right)$$

et on veut $A(q) = q^2(1 + o(q^2))$ $\quad$ ($A(q) = q^2$!)

Par identification on obtient donc

$$a_1^2=2 \qquad a_2=\frac{2}{3} \qquad a_1 a_3=\frac{1}{9}$$

le choix de $a_1=\sqrt{2}$ donne les b_i
celui de $a_1=-\sqrt{2}$ donne les c_i..

Dans un voisinage de 0 assez petit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k >0$ car $b_1>0$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k = \psi_+^{-1}(q^2)$ et on a bien

$$\psi_+^{-1}(q) = b_1\sqrt{q} + b_2 q + b_3 q^{3/2} + o(q^{3/2})$$

et de même, puisque $c_1<0$

$$\psi_-^{-1}(q) = c_1\sqrt{q} + c_2 q + c_3 q^{3/2} + o(q^{3/2}).$$

On ne peut dériver terme à terme un développement asymptotique, mais on peut dériver terme à terme un développement en série entière..

Dans un voisinage de 0^+

$$\psi_+^{-1}(q^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k q^k$$

donc $$2q\,(\psi_+^{-1})'(q^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,b_{k+1}\,q^k$$

soit $$(\psi_+^{-1})'(q)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)\,b_{k+1}}{2}\,q^{\frac{k-1}{2}}$$

$$= \frac{b_1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}} + b_2 + \frac{3}{2} b_3\sqrt{q} + o(\sqrt{q})$$

$$(\psi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q}).$$

et de même pour $(\psi_-^{-1})'(q)$.

Rq du correcteur. Question particulièrement technique au niveau calculatoire qui demande aussi une justification précise de la validité des calculs. Espérons qu'elle était bien payée.

__3. d)__ D'après la question 1. b)

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\int_{-1}^{0} e^{-y\varphi(s)}\, ds + \int_0^{+\infty} e^{-y\varphi(s)}\, ds \right)$$

Dans la première intégrale on effectue le changement de variable $s = \varphi_-^{-1}(q)$ et dans la deuxième le changement de variable $s = \varphi_+^{-1}(q)$ (changements bijectifs de classe C^1)

On obtient immédiatement

$$\underline{\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq} \left((\varphi_+^{-1})'(q) - (\varphi_-^{-1})'(q) \right) dq}$$

__3e)__ __D'après 3c)__ $(\varphi_1^{-1})'(q) - (\varphi_-^{-1})'(q) = \sqrt{2}\, q^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\, q^{+\frac{1}{2}} + o(\sqrt{q})$

Or $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0^+$ et $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)}$, donc on peut appliquer

__le résultat de la question 2. d)__ et

$$\underline{\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\sqrt{2}\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) \left(\tfrac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + o\left(\left(\tfrac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right)}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\sqrt{2\pi} \frac{1}{y^{1/2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{2}} \frac{1}{y^{3/2}} + o\left(\frac{1}{y^{3/2}}\right) \right)$$

$$\underline{\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \right)}$$

__Rq__ Cette méthode peut paraître coûteuse pour obtenir les deux premiers termes de la formule de Stirling. Son intérêt vient de ce qu'il suffit de pousser de manière automatique les calculs en 3c) pour obtenir autant de termes qu'on le désire. Néanmoins la série $\sum_{r \geq 0} b_r \frac{1}{y^r}$ ($b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{\ldots}$, …) est divergente pour tout $y > 0$. Ce qui justifie

Deuxième partie.

4) On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{x}$

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \qquad \text{(sous réserve d'existence)}$$

Or $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{e^{-u}}{u} \underset{+\infty}{=} o(e^{-u})$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Donc $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est intégrable sur $[\frac{1}{x}, +\infty[$ pour tout $x > 0$ et F est bien définie.

Puisque $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ on en déduit aussi que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ avec, par exemple,

$\forall x \in]0, +\infty[$ $\quad \underline{F'(x) = -x e^{-\frac{1}{x}}}$

5) Une première intégration parties donne

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \left[-x e^{-\frac{t}{x}} \frac{1}{t} \right]_1^{+\infty} - x \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-2}\, dt$$

$$F(x) = x e^{-\frac{1}{x}} - x \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-2}\, dt$$

Ce qui est bien $\underline{F(x) = S_1(x) + R_1(x)}$

On suppose $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$. $\qquad (N \geq 1)$

et on effectue une intégration par parties dans $R_N(x)$

$$R_N(x) = (-1)^N N!\, x^N \left\{ \left[-x e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} \right]_1^{+\infty} - x(N+1) \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+2)}\, dt \right\}$$

$$R_N(x) = \underbrace{(-1)^N N!\, x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}}}_{S_{N+1}(x) - S_N(x)} + \underbrace{(-1)^{N+1} (N+1)!\, x^{N+1} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+2)}\, dt}_{R_{N+1}(x)}$$

et $\quad \underline{F(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x)}.$

le résultat est établi par récurrence.

6a) . $\forall x \neq 0 \quad \lim_{k \to +\infty} |(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^k| = +\infty$ donc

si $x \neq 0$ le terme général de $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^k$ ne tend pas vers zéro donc cette série diverge. Pour $x=0$ elle converge.

$$R_{N+1}(x) - R_N(x) = -(-1)^N N!\, x^N e^{-\frac{1}{x}}$$

Donc la suite $\left(R_{N+1}(x) - R_N(x)\right)_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

A fortiori la suite $\left(R_N(x)\right)_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

6b) $\forall x > 0 \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt = x e^{-\frac{1}{x}}$.

Il en découle immédiatement $|R_N(x)| \leq |\mathcal{R}_N(x)|$

Or $|\mathcal{R}_{N+1}(x)| = (N+1)\, x\, |\mathcal{R}_N(x)| \underset{x \to 0^+}{=} o(|\mathcal{R}_N(x)|)$

Donc $R_{N+1}(x) \underset{x \to 0^+}{=} o(\mathcal{R}_N(x))$

6c) $R_N(x) = R_{N+1}(x) + \mathcal{R}_N(x)$ or $R_{N+1}(x) = o(\mathcal{R}_N(x))$

donc $R_N(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \mathcal{R}_N(x)$

6d) $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad |\mathcal{R}_N(x)| > 0$ et $\left|\frac{\mathcal{R}_{N+1}(x)}{\mathcal{R}_N(x)}\right| = (N+1)x$.

Donc $N+1 \leq \frac{1}{x} \iff |\mathcal{R}_{N+1}(x)| \leq |\mathcal{R}_N(x)|$

$\left(\mathcal{R}_N(x)\right)_{1 \leq N \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est décroissante

et $\left(\mathcal{R}_N(x)\right)_{N \geq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante.

(le $x < \frac{1}{2}$ n'est là que pour qu'il y ait effectivement une partie de la suite qui soit décroissante.)

7a) $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} |\Omega_{k-1}(x)|$

or puisque $0 < x \leq \frac{1}{N}$ la suite $(|\Omega_k(x)|)_{1 \leq k \leq N}$ est décroissante.

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{|\Omega_{2i}(x)| - |\Omega_{2i+1}(x)|}_{\geq 0} \geq 0$$

de plus $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$ et $R_N(x) \geq 0$ car N est pair.

donc $F(x) \geq S_N(x)$.

Il en résulte $E_N(x) = \frac{R_N(x)}{F(x)} \leq \frac{R_N(x)}{S_N(x)}$

$$E_N(x) \leq \frac{N!\, x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}}}{\sum_{l=0}^{M-1} \left((2l)!\, x^{2l+1} e^{-\frac{1}{x}} - (2l+1)!\, x^{2l+2} e^{-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{N!\, x^{N+1}}{\sum_{l=0}^{M-1} (1-(2l+1)x)(2l)!\, x^{2l+1}}$$

7b) par exemple $E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{4!\left(\frac{1}{10}\right)^5}{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{1000}\left(1-\frac{3}{10}\right)}$

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{24}{10^4\left(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{3}{1000}\right)}$$

$$\leq \frac{24}{10(1000-100+10-3)} = \frac{24}{10 \times 907}$$

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{24}{10 \times 800} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Remarque. Cette partie était plus facile que la précédente.