

Première partie

I.1) On prolonge par continuité  $\frac{\sin t}{t}$  en lui attribuant la valeur 1 pour  $t=0$ . Même si cela n'est pas exigé par l'énoncé c'est nécessaire par la question I.3)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n(0) = u_n$  donc  $\sum_{n \geq 1} U_n(0)$  converge.

- Si  $t \neq 0 \quad |U_n(t)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  car  $|\sin^2 nt| \leq 1$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car elle tend vers 0 puisque  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

Donc  $\sum_{n \geq 1} U_n(t)$  converge (absolument) d'après la règle de Riemann.

I.2) 
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \frac{2 \sin x \cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin^2 x}{x^3} = \frac{\sin 2x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

Or  $|\sin x| \leq 1 \quad |\sin 2x| \leq 1 \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ . Donc  $\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| \leq \frac{3}{x^2}$

Par conséquent  $0 \leq \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx \leq \int_{kt}^{(k+1)t} \frac{3 dx}{x^2} = 3 \left( \frac{1}{kt} - \frac{1}{(k+1)t} \right)$

Or la suite  $\left( \frac{1}{nt} \right)_{n \geq 1}$  converge donc la série  $\sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{kt} - \frac{1}{(k+1)t} \right)$  converge.

De plus puisque  $(kt)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 elle est bornée donc

$0 \leq |R_{kt}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx = O\left( \frac{1}{kt} - \frac{1}{(k+1)t} \right)$  et

par conséquent  $\sum_{k \geq 1} |R_{kt}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx$  converge.

De plus  $R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^N u_k \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} R_{N,n}(t)$ .

Or  $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} R_{N,n}(t) &= \sum_{k=n}^N (R_k - R_{k+1}) \frac{\sin^2 t}{k^2 t} = \sum_{k=n}^N R_k \frac{\sin^2 kt}{k^2 t} - \sum_{k=n}^N R_{k+1} \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2} \\ &= \sum_{k=n-1}^{N-1} R_{k+1} \frac{\sin^2 (k+1)t}{(k+1)^2 t^2} - \sum_{k=n}^N R_{k+1} \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2} \\ &= R_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t^2} + \sum_{k=n}^{N-1} R_{k+1} \left( \frac{\sin^2 (k+1)t}{(k+1)^2 t^2} - \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2} \right) - R_{N+1} \frac{\sin^2 Nt}{N^2 t} \end{aligned}$$

$$R_{N,n}(t) = R_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t^2} + \sum_{k=n}^{N-1} R_{k+1} \int_{kt}^{(k+1)t} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) dx + R_{N+1}$$

En passant aux valeurs absolues et en utilisant  $\left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| \leq 1$

(2)

$$|R_{N,n}(t)| \leq |r_n| + \sum_{k=n}^{N-1} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx + r_{N+1}$$

Or  $\lim_{N \rightarrow \infty} r_{N+1} = 0$  et la série de terme général  $|r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx$

converge. On peut donc faire tendre  $N$  vers  $\infty$  et on obtient la majoration demandée.

I.3) On en déduit

$$\begin{aligned} |R_{N,n}(t)| &\leq |r_n| + \left( \sup_{k \geq n+1} |r_k| \right) \sum_{k=n}^N \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx \\ &\leq |r_n| + \left( \sup_{k \geq n+1} |r_k| \right) \int_{nt}^{Nt} \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx \\ &\leq |r_n| + \left( \sup_{k \geq n+1} |r_k| \right) \left( \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx + \int_1^{Nt} \frac{3 dx}{x^3} \right) \\ &\leq |r_n| + \left( \sup_{k \geq n+1} |r_k| \right) \left( \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx + 3 \left( 1 - \frac{1}{Nt} \right) \right) \\ |R_{N,n}(t)| &\leq |r_n| + \left( \sup_{k \geq n+1} |r_k| \right) \left( \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx + 3 \right) \end{aligned}$$

Pour  $t = 0$ ,  $|R_n(0)| = |r_n|$  donc l'inégalité reste valable.

On en déduit  $\sup_{t \geq 0} |R_n(t)| \leq |r_n| + K \sup_{k \geq n+1} |r_k|$  L'inégalité est aussi vraie pour  $t < 0$  par parité.

On en déduit  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| \leq |r_n| + K \sup_{k \geq n+1} |r_k|$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| = 0$ , ce qui veut dire que

$\sum_{n \geq 1} U_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Or chaque  $U_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

P.S. le calcul fait à la première question montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0$  existe, ce qui justifie l'existence de  $\int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx$ .

I.4) Suivant l'indication donnée

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\sin^2 nt}{n^2} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{n^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{n^2 t^2}{n^2} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq n_0 t^2 + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = n_0 t^2 + \frac{1}{n_0} \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{t} \leq m_0 < \frac{1}{t} + 1$  donc  $\frac{1}{n_0} \leq t$  et finalement

(3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq t^2 + t + t = 2t + t^2$$

I.5) La convergence simple de la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} V_n$  se démontre comme dans la première question. Ici  $V_n(0) = 0$ , donc on n'a pas besoin de la convergence de  $\sum_{n \geq 1} V_n$ . On a juste besoin de savoir que  $(V_n)_{n \geq 1}$  est bornée. La règle de Weierstrass nous garantit même la convergence absolue de toutes les séries qui nous intéressent.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \neq 0 \quad |R_n(t)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} V_k \frac{\sin^2 kt}{k^2 t} \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |V_k| \frac{\sin^2 kt}{k^2 t} \leq \left( \sup_{k \geq n} |V_k| \right) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\sin^2 kt}{k^2 t}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \neq 0 \quad |R_n(t)| \leq \sup_{k \geq n} |V_k| (2 + t)$$

Cette inégalité étant vraie pour  $t = 0$ .

$$\forall a \in \mathbb{R}^{**} \quad \sup_{t \in [-a, a]} |R_n(t)| \leq \left( \sup_{k \geq n} |V_k| \right) (2 + a)$$

$$\text{Donc } \forall a \in \mathbb{R}^{**} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [-a, a]} |R_n(t)| = 0$$

Donc  $\sum_{n \geq 1} V_n$  converge uniformément sur  $[-a, a]$  pour tout  $a > 0$ .

Or chaque  $V_n$  est continue sur  $[-a, a]$ . Il en résulte que la somme  $T = \sum_{n \geq 1} V_n$  est continue sur  $[-a, a]$  pour tout  $a > 0$ , donc  $T$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .