

Deuxième partie

(4)

II.1) Soit $h > 0$ et $f: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0) - \Delta f(x_0, h) t^2$$

f est à valeurs réelles

f est dérivable sur $]0, h[$ et continue sur $[0, h]$

$$f(0) = f(h) = 0$$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc c dans $]0, h[$ tel que $f'(c) = 0$

$$\text{Or } f'(t) = f'(x_0+t) - f'(x_0-t) - 2t \Delta f(x_0, h)$$

f' est à valeurs réelles, continue sur $[0, c]$ dérivable sur $]0, c[$ et

$f'(0) = f'(c) = 0$. On peut à nouveau appliquer le théorème de Rolle

donc il existe d dans $]0, c[$ tel que $f''(d) = 0 = f''(x_0+d) - f''(x_0-d) - \Delta f''(x_0, h)$

$$\text{On a donc prouvé: } \forall h \in \mathbb{R}^* \exists d \in]0, h[\Delta f(x_0, h) = \frac{f''(x_0+d) + f''(x_0-d)}{2}$$

Or f'' est continue en x_0 donc $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x_0, h) = f''(x_0)$

Donc $f^{(3)}(x_0)$ existe et $f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0)$

II.2) Prenons par exemple $f(x) = (x-x_0)|x-x_0|$, alors

$$f(x_0+h) = h^2 \quad f(x_0-h) = -h^2 \quad \text{si } h > 0. \quad \text{Donc } \Delta f(x_0, h) = 0$$

Donc $f^{(3)}(x_0) = 0$ existe mais f n'est pas deux fois dérivable en x_0 car $f'(x) = 2|x-x_0|$.

II.3) Supposons que f admette en x_0 un minimum alors

$\forall h \in \mathbb{R}^{*+}$ (tel que $[x_0-h, x_0+h] \subset I$, nous le redisons plus) $f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) \geq 0$

donc par passage à la limite $f^{(3)}(x_0) \geq 0$. De même si f

admet un maximum en x_0 $f^{(3)}(x_0) \leq 0$

II.4) le résultat découle de la linéarité de $f \mapsto \Delta f(x_0, h)$ et de la linéarité du passage à la limite.

II.5.1a) Si $f: x \mapsto Ax+B$ est un polynôme de degré ≤ 1

$$\text{alors } \forall (x_0, h) \quad \Delta f(x_0, h) = (A(x_0+h)+B) + (A(x_0-h)+B) - 2(Ax_0+B) = 0$$

donc par passage à la limite $\forall x_0 \in J \quad f^{(3)}(x_0) = 0$ et

f appartient au noyau de d .

II 5 b) Soit $H: x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. H est polynôme de degré au plus 1 donc $d(H) = 0$

Soit $K: x \mapsto (x-a)(b-x)$. K est de classe $\mathcal{C}^2$ donc $d(K) = K'' = -2$

Finalement $d(\varphi_{\varepsilon,i}) = -2\varepsilon(-1)^i$ par linéarité.

Donc $\forall x_0$ $\varphi_{\varepsilon,1}^{(iii)}(x_0) > 0$. Donc d'après la question II.3)

$\varphi_{\varepsilon,1}$ ne peut atteindre de maximum sur $]a,b[$. Or $\varphi_{\varepsilon,1}$ est continue sur $[a,b]$ donc atteint un maximum sur cet intervalle.

Or on a donc $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_{\varepsilon,1}(x) \leq \max(\varphi_{\varepsilon,1}(a), \varphi_{\varepsilon,2}(a)) = 0$

De même $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_{\varepsilon,2}(x) \geq 0$

Donc finalement

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{**} \forall x \in [a,b] \quad -\varepsilon(x-a)(b-x) \leq f(x) - H(x) \leq \varepsilon(x-a)(b-x).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\forall x \in [a,b]$ $f(x) = H(x)$.

Donc $\forall [a,b] \subset J$ $f|_{[a,b]}$ est une fonction polynôme de degré ≤ 1

Donc $\forall [a,b] \subset J$ $(f|_{[a,b]})'' = 0$

Donc $\forall x \in J$ $f''(x) = 0$

Donc $f|_J$ est un polynôme de degré ≤ 1 .

Par continuité f est une fonction polynôme de degré ≤ 1

II 6) A définit $(m+1)$ intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, avec $x_0 = \inf I$

et $x_{m+1} = \sup I$, sur lesquels f est affine. On écrit $f|_{]x_i, x_{i+1}[} (x) = A_i x + B_i$

On a pour h assez petit ($h < \min(x_{i+1} - x_i)$)

$$h \Delta f(x_i, h) = \frac{1}{h} (A_i(x_i + h) + B_i + A_{i-1}(x_i - h) + B_{i-1} - 2f(x_i))$$

Puisque f est continue on a $A_i x_i + B_i = A_{i-1} x_i + B_{i-1} = f(x_i)$ (*)

$$\text{donc } h \Delta f(x_i, h) = A_i - A_{i-1}$$

Donc si $\lim_{h \rightarrow 0} h \Delta f(x_i, h) = 0$ alors $A_i = A_{i-1}$ (pour tout i)

puis $B_i = B_{i-1}$ d'après (*), donc f est une fonction polynôme de degré au plus 1.

