X-ESPCI 2004 COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Polynômes unitaires de norme minimale

Première partie

1. a) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, posons $Q_j = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} (X - x_k)$. Q_j est un polynôme unitaire de degré $n-1$. On peut écrire $P = (X - x_j)Q_j$ avec $Q_j(x_j) \neq 0$, d'où $P' = Q_j + (X - x_j)Q'_j$ et $P'(x_j) = Q_j(x_j)$. On a ainsi $P_j = \dfrac{Q_j}{Q_j(x_j)}$.

$$\boxed{P_j \text{ est un polynôme de degré } n-1.}$$

b) Comme on a $Q_j(x_k) = 0$ pour $k \neq j$, on voit que :

$$\boxed{\forall (j,k) \in [\![1, n]\!]^2,\ P_j(x_k) = \delta_{j,k} \text{ (symbole de Kronecker).}}$$

On peut alors calculer :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ L_F(x_k) = \sum_{j=1}^{n} F(x_k)\delta_{j,k} = F(x_k).}$$

c) On remarque que $\sum_{j=1}^{n} P_j$ prend la valeur 1 en chacun des points $x_k,\ k = 1 \ldots n$. Le polynôme $1 - \sum_{j=1}^{n} P_j$ est de degré au plus $n-1$ et possède au moins n racines distinctes, il est donc nul. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} P_j = 1.}$$

d) Les polynômes $P_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$, sont dans $\mathcal{E}_{n-1}$, qui est de dimension n, et sont en nombre n. Montrons qu'ils constituent une famille libre. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = 0$. On aura alors $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j(x_k) = 0$. Or $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{j,k} = \lambda_k$. On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$. Il en résulte que :

$$\boxed{\text{la famille } P_1, \ldots, P_n \text{ est une base de } \mathcal{E}_{n-1}.}$$

2. La formule $\forall (j,k) \in [\![1, n]\!]^2,\ P_j(x_k) = \delta_{j,k}$ s'écrit maintenant

$$\forall (j,k) \in [\![1, n]\!]^2,\ \delta_{j,k} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} x_k^i = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i+1,j} V_{k,i+1} = \sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell,j} V_{k,\ell} = (VB)_{k,j} \quad \text{soit} \quad VB = I_n.$$

Ceci suffit à prouver que :

$$\boxed{V \text{ est inversible et } V^{-1} = B.}$$

3. a) Le polynôme Q_j (notation introduite en **1. a)**) est unitaire, et $P'(x_j) = Q_j(x_j)$. Comme $P_j = \dfrac{Q_j}{Q_j(x_j)}$ on voit que le coefficient dominant de P_j est :

$$\boxed{b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}.}$$

On peut alors écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k}(x_k)^j = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}V_{k,j+1} = (BV)_{n,j+1}$. On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} = \delta_{n,j+1}.}$$

Remarque : la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{X^j}{P}$ aurait permis d'obtenir le même résultat.

b) On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \mathrm{C}_{n-1}^{j}(x_k)^j X^{n-1-j}}{P'(x_k)} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \mathrm{C}_{n-1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}\right) X^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \mathrm{C}_{n-1}^{j}\delta_{n,j+1}X^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \mathrm{C}_{n-1}^{j}\delta_{n-1,j}X^{n-1-j} \\
&= (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} \text{ est un polynôme constant égal à } (-1)^{n-1}.}$$

Deuxième partie

4. a) Les applications $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont définies sur $\mathcal{E}_d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $Q \in \mathcal{E}_d$ défini par $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On voit que $\lambda Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} \lambda a_i X^i$ donc

$$N(\lambda Q) = \sup_{0\leqslant i\leqslant d} |\lambda a_i| = |\lambda| \sup_{0\leqslant i\leqslant d} |a_i| = |\lambda| N(Q).$$

De même

$$\|\lambda Q\|_K = \sup_{z\in K} |\lambda Q(z)| = |\lambda| \sup_{z\in K} |Q(z)| = |\lambda| \|Q\|_K.$$

Soient $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} b_i X^i$. On a $Q + R = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} (a_i + b_i) X^i$ donc

$$N(Q+R) = \sup_{0\leqslant i\leqslant d} |a_i + b_i| \leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant d} |a_i| + \sup_{0\leqslant i\leqslant d} |b_i| = N(Q) + N(R).$$

De même
$$\|Q+R\|_K=\sup_{z\in K}|Q(z)+R(z)|\leqslant \sup_{z\in K}|Q(z)|+\sup_{z\in K}|R(z)|=\|Q\|_K+\|R\|_K.$$

Enfin soit $Q=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i$. Si $N(Q)=0$, tous les coefficients $a_i,\ 0\leqslant i\leqslant d$ sont nuls et donc $Q=0$.
De même si $\|Q\|_K=0$, Q admet tous les points de K comme racines. Comme il y en a au moins $d+1$ et que le degré de Q est au plus égal à d ceci entraîne encore $Q=0$.

$$\boxed{Q\mapsto N(Q) \text{ et } Q\mapsto \|Q\|_K \text{ sont des normes sur } \mathcal{E}_d.}$$

Comme $\mathcal{E}_d$ est de dimensions finie, toutes les normes sur $\mathcal{E}_d$ sont équivalentes. En particulier :

$$\boxed{Q\mapsto N(Q) \text{ et } Q\mapsto \|Q\|_K \text{ sont des normes équivalentes.}}$$

b) La fonction $Q\mapsto \|Q\|_K$ est évidemment continue sur l'espace normé $(\mathcal{E}_d,\|\ \|_K)$ puisqu'elle y est lipschitzienne de rapport 1. En effet on déduit de l'inégalité triangulaire que $\Big|\|Q\|_K-\|R\|_K\Big|\leqslant\|Q-R\|_K$.

5. a) Soit $Q=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i$. On peut écrire

$$\forall z\in K,\ |Q(z)|=\left|\sum_{i=0}^{d}a_iz^i\right|\leqslant\sum_{i=0}^{d}|a_i||z|^i\leqslant\sum_{i=0}^{d}\sup_{0\leqslant i\leqslant d}|a_i|\rho^i=N(Q)\sum_{i=0}^{d}\rho^i.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sup_{\substack{Q\in\mathcal{E}_d\\ Q\neq 0}}\frac{\|Q\|_K}{N(Q)}\leqslant\sum_{i=0}^{d}\rho^i.}$$

b) Soit toujours $Q=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i$. Notant (comme en **2.**) :

$$V=\begin{pmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^d\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^d\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{d+1} & \cdots & x_{d+1}^d\end{pmatrix}\quad\text{et } B=\begin{pmatrix}b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,d+1}\\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,d+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & b_{d,d+1}\end{pmatrix}$$

on a $B=V^{-1}$. Pour tout $j\in[\![1,d+1]\!]$ on a $Q(x_j)=\sum_{i=0}^{d}a_ix_j^i$ ce qui peut se résumer à la formule matricielle :

$$\begin{pmatrix}Q(x_1)\\ Q(x_2)\\ \vdots\\ Q(x_{d+1})\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix}\quad\text{d'où}\quad\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}Q(x_1)\\ Q(x_2)\\ \vdots\\ Q(x_{d+1})\end{pmatrix}$$

soit pour tout entier $\ell\in[\![0,d]\!]$: $a_l=\sum_{k=1}^{d+1}b_{l-1,k}Q(x_k)$. On en tire

$$\forall\ell\in[\![0,d]\!],\ |a_\ell|\leqslant\sum_{k=1}^{d+1}|b_{l-1,k}||Q(x_k)|\leqslant(d+1)\beta\|Q\|_K.$$

On a donc bien prouvé que :

$$\boxed{\sup_{\substack{Q\in\mathcal{E}_d\\ Q\neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1).}$$

Troisième partie

6. a) Le polynôme $D = X^d$ est élément de $\mathcal{U}_d$ et $\forall z \in K,\ |D(z)| = |z|^d \leqslant \rho^d$ donc $\|D\|_K \leqslant \rho^d$. On en déduit que $\inf\limits_{Q\in\mathcal{U}_d} \|Q\|_K \leqslant \rho^d$. Comme d'autre part toute norme est positive, on a bien :

$$\boxed{0 \leqslant m \leqslant \rho^d.}$$

b) On peut décomposer $\underbrace{\left\{\|Q\|_K \;\middle|\; Q\in\mathcal{U}_d\right\}}_{\mathcal{A}} = \underbrace{\left\{\|Q\|_K \;\middle|\; \begin{array}{c} Q\in\mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leqslant \rho^d \end{array}\right\}}_{\mathcal{B}} \cup \underbrace{\left\{\|Q\|_K \;\middle|\; \begin{array}{c} Q\in\mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K > \rho^d \end{array}\right\}}_{\mathcal{C}}.$

Par définition $m = \inf \mathcal{A}$. On veut prouver $\inf \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$.

- ◇ C'est évident si $\mathcal{C}$ est vide.
- ◇ Sinon $\inf \mathcal{B} \leqslant \rho^d \leqslant \inf \mathcal{C} \Rightarrow \inf \mathcal{A} = \inf(\inf \mathcal{B}, \inf \mathcal{C}) = \inf \mathcal{B}$.

$$\boxed{\inf_{\substack{Q\in\mathcal{U}_d\\ \|Q\|_K\leqslant\rho^d}} \|Q\|_K = m.}$$

c) L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_d & \to & \mathbb{C} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i & \mapsto & a_d \end{array}$ est 1-lipschitzienne si l'on munit $\mathcal{E}_d$ de la norme N. Elle est donc continue, et $\mathcal{U}_d$, image réciproque du fermé $\{1\}$, est fermé. Vue l'équivalence des normes c'est aussi un fermé de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\ \|_K)$.

L'ensemble $\{Q \mid \|Q\|_K \leqslant \rho^d\}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ^d de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\ \|_k)$. C'est donc un compact. L'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact. Sur ce compact la fonction continue et à valeurs réelles $Q \mapsto \|Q\|_K$ atteint sa borne inférieure m. Donc :

$$\boxed{\exists Q_0 \in \mathcal{U}_d \text{ tel que } \|Q_0\|_K = m.}$$

Quatrième partie

7. Soit $|c_k| = \alpha \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = \alpha\, \mathrm{e}^{i\theta}$. Choisissons par exemple $z = z_0 + \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} \mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{k}}$. On calcule $Q(z) = 1 + \alpha\, \mathrm{e}^{i\theta} \dfrac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-i\theta} = 2$ et on a bien :

$$\boxed{2 = |Q(z)| > |Q(z_0)| = 1.}$$

8. a) Le polynôme $Q-1$ est non nul et il a la racine z_0. Soit k l'ordre de cette racine, on peut écrire $Q - 1 = (X-z_0)^k S$ où S est un polynôme non nul en z_0. Posons $c_k = S(z_0)$, le polynôme $\dfrac{S}{c_k} - 1$ a la racine z_0 et peut donc s'écrire à son tour $\dfrac{S}{c_k} - 1 = (X - z_0)R$. On a $Q - 1 = c_k(X-z_0)^k\,(1 + (X-z_0)R)$ soit :

$$\boxed{Q = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } c_k \in \mathbb{C}^*.}$$

b) D'après la relation précédente il suffit de trouver un complexe z tel que $|z - z_0| = r$ et que $c_k(z - z_0)^k$ soit un réel positif. Si l'on note $c_k = \alpha\,\mathrm{e}^{i\theta}$ comme en **7.** avec $\alpha > 0$ on voit que $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{k}}$ convient. En effet on a alors

$$Q(z) = 1 + \alpha\,\mathrm{e}^{i\theta}\left(r\,\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{k}}\right)^k + \alpha\,\mathrm{e}^{i\theta}\left(r\,\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{k}}\right)^k(z - z_0)R(z) = 1 + \alpha r^k + \alpha r^k(z - z_0)R(z)$$

qui est bien égal à $1 + |c_k||z - z_0|^k + |c_k||z - z_0|^k(z - z_0)R(z)$.

c) Si R est le polynôme nul (ce qui n'est pas interdit par l'énoncé), le z trouvé en **b)** convient puisque $|z - z_0| = r$ et $|Q(z)| = 1 + |c_k||z - z_0|^k > 1 = |Q(z_0)|$. Sinon la fonction continue $z \mapsto |R(z)|$ étant bornée sur le compact $\mathcal{B}_f(z_0, r)$ on peut poser $M = \sup_{|z-z_0|\leqslant r} |R(z)|$ et $r' = \min\left(r, \dfrac{1}{2M}\right)$. Appliquons alors **b)** en faisant jouer le rôle de r par r'. On trouve ainsi un z tel que $z - z_0 = r'$ et $Q(z) = 1 + a + a(z - z_0)R(z)$ avec $a = |c_k||z - z_0|^k$. On a alors $|Q(z)| \geqslant 1 + a - a|(z - z_0)R(z)|$.
Comme par construction $|(z - z_0)R(z)| = r'|R(z)| \leqslant \dfrac{1}{2M}M = \dfrac{1}{2}$ on a bien :

$$\boxed{|Q(z)| \geqslant 1 + \frac{a}{2} > 1 = |Q(z_0)| \text{ avec } |z - z_0| = r' \leqslant r.}$$

9. a) Soit $Q \in \mathcal{E}_d$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Distinguons deux cas :

- $\diamond$ $Q(z_0) = 0$. Comme Q n'est pas nul la fonction polynôme associée n'est pas nulle sur l'ensemble infini $\mathcal{B}_f(z_0, r)$. On peut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.
- $\diamond$ $Q(z_0) \neq 0$. Posons $T = \dfrac{Q}{Q(z_0)}$ et appliquons à T le résultat de **8. c)** : on trouve un z vérifiant $|z - z_0| \leqslant r$ et $|T(z)| > |T(z_0)|$ soit $\dfrac{|Q(z)|}{|Q(z_0)|} > \dfrac{|Q(z_0)|}{|Q(z_0)|}$ et donc $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

$$\boxed{\forall Q \in \mathcal{E}_d \text{ non constant}, \forall z_0 \in \mathbb{C},\ \forall r > 0,\ \exists z \in \mathcal{B}_f(z_0, r) \text{ tel que } |Q(z)| > |Q(z_0)|.}$$

b) Remarquons tout d'abord que l'inégalité $\sup_{|z|\leqslant 1} |Q(z)| \geqslant \sup_{|z|=1} |Q(z)|$ découle directement du fait que le cercle unité est inclus dans la boule unité fermée. Il reste à montrer $\sup_{|z|\leqslant 1} |Q(z)| \leqslant \sup_{|z|=1} |Q(z)|$.

- $\diamond$ Si le polynôme Q est constant le résultat est trivial.
- $\diamond$ Supposons Q non constant. La fonction réelle continue $z \mapsto |Q(z)|$ atteint son maximum sur la boule unité fermée en un point z_0. Il nous suffit de montrer que $|z_0| = 1$. Supposons par l'absurde que $|z_0| < 1$ et appliquons le **a)** avec Q, z_0 et $r = 1 - |z_0|$. On trouve un z pour lequel $|Q(z)| > |Q(z_0)|$ et $|z - z_0| \leqslant 1 - |z_0|$. Mais alors $|z| = |z_0 + (z - z_0)| \leqslant |z_0| + |z - z_0| \leqslant 1$ ce qui est incompatible avec $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

$$\boxed{\forall Q \in \mathcal{E}_d,\ \sup_{|z|\leqslant 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.}$$

c) Au polynôme $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ associons le polynôme $\widetilde{Q} \in \mathcal{E}_d$ défini par $\widetilde{Q} = \sum_{i=0}^{d} a_{d-i} X^i = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\dfrac{Q(z)}{z^d} = \widetilde{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Quand z décrit le cercle unité il en est de même de $\frac{1}{z}$, on voit donc que $\sup_{|z|=1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |\widetilde{Q}(z)|$. Pour tout z tel que $|z| \geqslant 1$ on a $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 1$ et $\left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| = \left|\widetilde{Q}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant \sup_{|z'|\leqslant 1} |\widetilde{Q}(z')| = \sup_{|z'|=1} |\widetilde{Q}(z')| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. On a ainsi prouvé que $\sup_{|z|\geqslant 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| \leqslant \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. L'inégalité inverse est triviale puisque lorsque $|z| = 1$ on a $|z| \geqslant 1$ et $|Q(z)| = \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right|$.

$$\boxed{\sup_{|z|\geqslant 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.}$$

d) On voit que $\|Q_0\|_K = 1$. Pour prouver l'égalité demandée il suffit de montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathcal{U}_d$ on a $\|Q\|_K \geqslant 1$, soit avec le choix fait pour K dans cette question : $\forall Q \in \mathcal{U}_d,\ \sup_{|z|\leqslant 1} |Q(z)| \geqslant 1$ ou encore avec **c)** : $\forall Q \in \mathcal{U}_d,\ \sup_{|z|\geqslant 1} \left|\frac{Q(z)}{z^d}\right| \geqslant 1$. Ce dernier résultat découle du fait que, Q étant unitaire de degré d, $Q(x) \underset{+\infty}{\sim} x^d$ et donc pour z réel positif : $\lim_{z\to+\infty} \frac{Q(z)}{z^d} = 1$.

$$\boxed{\text{Lorsque } K = \big\{z \;\big|\; |z| \leqslant 1\big\} \text{ la borne } m \text{ vaut 1 et elle est atteinte pour } Q_0 = X^d.}$$

Cinquième partie

10. La relation $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ élevée au carré devient $(z_0 + z_1)(\overline{z_0} + \overline{z_1}) = z_0\overline{z_0} + z_1\overline{z_1} + 2|z_0 z_1|$ soit après simplification : $\Re(z_0\overline{z_1}) = |z_0\overline{z_1}|$. Les seuls complexes ayant leur partie réelle égale à leur module sont les réels positifs, donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_0\overline{z_1} = \alpha$. On en déduit puisque $z_1 \neq 0$ que $z_0 = \lambda z_1$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{|z_1|^2}$. On a évidemment $\lambda \geqslant 0$, et la non nullité de z_0 garantit alors $\lambda > 0$.

11. a) On remarquera que la formule $Q_t = tQ_1 + (1-t)Q_0$ est encore valable pour $t \in \{0, 1\}$.
On peut écrire $\forall z \in K$, $|Q_t(z)| = |tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| \leqslant |t||Q_1(z)| + |1-t||Q_0(z)| \leqslant m$ puisque $t \geqslant 0,\ 1-t \geqslant 0,\ \|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m$. On a donc $\|Q_t\|_K \leqslant m$. D'autre part le polynôme Q_t est dans $\mathcal{U}_d$ puisque son coefficient dominant est $t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1$ et donc $\|Q_t\|_K \geqslant m$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ \|Q_t\|_K = m.}$$

b) On a $m = |Q_t(z)| = |tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| \leqslant t|Q_1(z)| + (1-t)|Q_0(z)|$ et $\begin{cases} |Q_0(z)| \leqslant \|Q_0\|_K = m \\ |Q_1(z)| \leqslant \|Q_1\|_K = m. \end{cases}$
Ces deux inégalités sont donc des égalités, et en outre $|tQ_1(z) + (1-t)Q_0(z)| = t|Q_1(z)| + (1-t)|Q_0(z)|$. D'après **10.** il existe alors $\lambda_z > 0$ tel que $Q_1(z) = \frac{\lambda_z(1-t)}{t} Q_0(z)$ autrement dit il existe un réel $\mu_z > 0$ tel que $Q_1(z) = \mu_z Q_0(z)$. L'égalité des modules impose alors $\mu_z = 1$ et finalement $\boxed{Q_0(z) = Q_1(z)}$.

c) D'après la question précédente tout point de K où $|Q_t|$ atteint son maximum est une racine de $Q_0 - Q_1$. Comme les polynômes Q_0 et Q_1 sont unitaires de degré d, leur différence est de degré au plus $d-1$ et ne peut donc avoir plus de $d-1$ racines, donc :

$$\boxed{\forall t \in \,]0,1[\,,\ \mathrm{Card}(\mathcal{M}(Q_t)) < d.}$$

12. a) Soit $n \leqslant d$ le cardinal de $\mathcal{M}(Q)$ et $x_1, \ldots, x_n$ ses éléments. Reprenant les notations de la première partie on pose $L = L_Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q(x_j)P_j$. D'après **I 1. b)** on a bien $L \in \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}_{d-1}$ et quel que soit $k \in [\![1, n]\!]$, $L(x_k) = Q(x_k)$.

$$\boxed{\text{On a ainsi défini } L \in \mathcal{E}_{d-1} \text{ tel que } \forall z \in \mathcal{M}(Q),\ L(z) = Q(z).}$$

b) Comme L est de degré au plus $d-1$ le polynôme Q_p est encore dans $\mathcal{U}_d$ donc $\|Q_p\|_K \geqslant m = \|Q\|_K$. La compacité de K garantit alors l'existence d'un point $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| = \|Q_p\|_K$. Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists z_p \in K \text{ tel que } |Q_p(z_p)| \geqslant \|Q\|_K}$$

c) On a $|Q_{n_p}(z_{n_p})| = \left|Q(z_{n_p}) - \dfrac{1}{n_p}L(z_{n_p})\right|$. La fonction L est bornée sur K et la fonction Q est continue. Lorsque p tend vers $+\infty$, n_p aussi ; z_{n_p} tend vers ℓ et le second membre de cette égalité tend vers $|Q(\ell)|$. Comme le premier reste minoré par $\|Q\|_K$ on en déduit $|Q(\ell)| \geqslant \|Q\|_K$ et donc par définition de la borne supérieure :

$$\boxed{|Q(\ell)| = \|Q\|_K.}$$

Cela peut encore se dire $\ell \in \mathcal{M}(Q)$ et donc par construction de L :

$$\boxed{L(\ell) = Q(\ell).}$$

d) Comme $|Q(\ell)| = m$, $Q(\ell)$ est non nul et on peut poser $\varepsilon_p = \dfrac{Q(z_{n_p})}{Q(\ell)} - 1$. On a $\boxed{Q(z_{n_p}) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)}$ et $Q(\ell) = \sup\limits_{z \in K} |Q(z)|$ garantit alors $\boxed{|1+\varepsilon_p| \leqslant 1}$. D'autre part $\lim\limits_{p \to +\infty} Q(z_{n_p}) = Q(\ell)$ montre que $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0}$.
De même pour p assez grand $Q(z_{n_p})$ est non nul (puisque sa limite l'est) et on peut donc poser $\varepsilon'_p = \dfrac{L(z_{n_p})}{Q(z_{n_p})} - 1$. On a alors $\boxed{L(z_{n_p}) = Q(z_{n_p})(1+\varepsilon'_p) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)(1+\varepsilon'_p)}$.
Puisque $\lim\limits_{p \to +\infty} L(z_{n_p}) = L(\ell) = Q(\ell) = \lim\limits_{p \to +\infty} Q(z_{n_p})$ on a aussi $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} \varepsilon' = 0}$. On peut alors écrire

$$Q_{n_p}(z_{n_p}) = Q(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p}L(z_{n_p}) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)\left(1 - \frac{(1+\varepsilon'_p)}{n_p}\right).$$

et par conséquent

$$|Q_{n_p}(z_{n_p})| \leqslant |Q(\ell)||1+\varepsilon_p|\left|1 - \frac{(1+\varepsilon'_p)}{n_p}\right| \leqslant |Q(\ell)||1+\varepsilon_p|\left(\left(1 - \frac{1}{n_p}\right) + \frac{|\varepsilon'_p|}{n_p}\right).$$

Comme $|1+\varepsilon_p| \leqslant 1$ et que pour p assez grand $|\varepsilon'_p| < 1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour } p \text{ assez grand } |Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K.}$$

Ce résultat est en contradiction avec la condition $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ |Q_p(z_p)| \geqslant \|Q\|_K$ qui a présidé au choix des z_p ; l'hypothèse « $\exists Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\mathrm{Card}(\mathcal{M}(Q)) \leqslant d$ » faite au début de la question **12.** est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

13. D'après la question **11.**, s'il existe deux polynômes Q_0 et Q_1 de $\mathcal{U}_d$ tels que $\|Q_0\|_K = m$ et $\|Q_1\|_K = m$, le polynôme $T = \dfrac{Q_0 + Q_1}{2}$ (par exemple) est encore un polynôme de $\mathcal{U}_d$ vérifiant $\|T\|_K = m$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{M}(T)) < d$. On vient de voir que c'est impossible, et donc :

$$\boxed{\text{il y a unicité du polynôme } Q_0 \text{ de } \mathcal{U}_d \text{ tel que } \|Q_0\|_K = m.}$$