Polytechnique M' (maintenant MP) 1982

Première composition de Mathématiques

Partie I.

I.1er) $a_n = (-1)^n$. $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2} \left(= \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \right)$

$$\sigma_n = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)} = \sigma_n$$

On en déduit !

$\underline{S_1 \notin \mathcal{S}_1}$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0

$\underline{S_1 \in \mathcal{S}_2}$ car $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$.

$\underline{S_1 \in \mathcal{S}_3}$ car $\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge vers $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (ce qui prouve que son rayon de convergence est au moins égal à 1), et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$.

I.2ème) $a_n = (-1)^n n$. $s_{2p} = p$ $s_{2p+1} = -(p+1)$ (conjecture sur s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, puis vérification par récurrence.

En particulier $s_0 = 0$ et $\forall p \geq 1$ $s_{2p} + s_{2p-1} = 0$.

Il en résulte $\sigma_{2p} = 0$ et $\sigma_{2p+1} = \frac{-(p+1)}{2p+1+1} = -\frac{1}{2}$.

Par dérivation sur $]-1,1[$ de la fonction f obtenue à la question précédente on obtient $\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

Donc $\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\frac{x}{(1+x)^2}$.

Il résulte de tout cela que !

$\underline{S_2 \notin \mathcal{S}_1}$ $\underline{S_2 \notin \mathcal{S}_2}$ et $\underline{S_2 \in \mathcal{S}_3}$ $\left(\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\frac{1}{4}\right)$

I.3°) C'est le lemme de Cesàro, Placer ici la démonstration que vous devez impérativement connaître.

I.4° a) Par hypothèse $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge, donc elle est bornée, donc pour $|x|<1$ $((n+1)\sigma_n . x^n)$ tend vers 0. Par conséquent le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(n+1)\sigma_n x^n$ est au moins 1 et finalement $\sum_{n\geq 0}(n+1)\sigma_n x^n$ converge si $|x|<1$.

Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\sigma_n x^n$, définie sur $]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[\quad xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\sigma_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\sigma_{n-1} x^n$

$\forall x \in]-1,1[\quad (1-x)g(x) = g(x)-xg(x) = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1})x^n$

$$(1-x)g(x) = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = h(x)$$

le même procédé appliqué à h, puisque $s_n - s_{n-1} = a_n$ pour $n\geq 1$ et $s_0 = a_0$, prouve la convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour x dans $]-1,1[$, avec :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x)\,h(x) = (1-x)^2 g(x)$$

I.4° b) On a utilisé en 1°) et 2°) le résultat $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ (obtenu par dérivation) pour x dans $]-1,1[$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$, montrons

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)^2 g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\sigma_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n} = \sigma.$$

Démonstration.

- Commençons par remarquer que $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

(Il faudrait savoir prouver en général que si $\forall n \geq 0 \quad a_n \geq 0$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ diverge alors $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\infty$ (on suppose $R = 1$, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ convergente pour tout x de $[0, 1[$)

- Ensuite $\forall x \in [0, 1[$

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n} - \sigma = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(\sigma_n - \sigma) x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}.$$

- On termine en calquant la démonstration du lemme de Cesàro.

- Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 + 1 \quad |\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall x \in [0, 1[\quad \underbrace{\left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n} - \sigma \right|}_{= A(x) = f(x) - \sigma} \leq \frac{\sum\limits_{n=0}^{n_0} (n+1)|\sigma_n - \sigma| x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n} + \frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} (n+1)\frac{\varepsilon}{2} x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}$$

$$\leq \underbrace{\frac{\sum\limits_{n=0}^{n_0} (n+1)|\sigma_n - \sigma|}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}}_{R(x)} + \frac{\varepsilon}{2} \times 1$$

Or $\lim\limits_{x\to 1^-} R(x) = 0$, donc $\exists \eta > 0 \ \forall x \in [1-\eta, 1[\quad R(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Et par conséquent. $\exists \eta > 0 \ \forall x \in [1-\eta, 1[\quad |A(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \ \forall x \in [1-\eta, 1[\quad |A(x)| < \varepsilon]$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 1^-} A(x)$

soit $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sigma$

On remarquera que la démonstration précédente, reste valable si on remplace $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$ par une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R telle que $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ diverge et $\forall n \quad a_n \geq 0$.

On a alors $\lim_{x\to R^-} \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = \lim_{n\to+\infty} u_n$. (en supposant qu'elle existe)

(le résultat étant valable, ainsi que la démonstration si $R = +\infty$)

I 5ème) 3) et 1) donnent $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$.

4) et 2) donnent $\mathcal{S}_2 \neq \mathcal{S}_3$.

On suppose maintenant $\forall n \geq 0 \quad a_n \geq 0$. On note $\mathcal{S}_1^+, \mathcal{S}_2^+, \mathcal{S}_3^+$ les sous-ensembles associés

Supposons $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{S}_3^+$

On a $\ell = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. existe.

Or $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1[\quad \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \ell$

(La dernière inégalité résulte de la croissance de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui résulte elle-même de la positivité des a_n).

En passant à la limite.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$$

ceci prouve que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$.

(car $\sum_{n\geq 0} a_n$ est une série à termes positifs)

donc $(a_n)_{n\geq 0}$ est dans $\mathcal{S}_1^+$ et $\mathcal{S}_1^+ = \mathcal{S}_3^+$

(Rq, on a aussi $\forall x \in [0, 1[\quad f(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, donc par passage à la limite $\ell \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et finalement $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$)

On suppose maintenant $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{S}_2^+$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$.

En particulier $(s_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Or $\sigma_{2n-1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} s_k \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k \geq \frac{1}{2n} n s_n = \frac{s_n}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \leq 2\sigma_{2n-1}$.

Puisque $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ est convergente elle est bornée

Donc $(s_n)_{n\geq 0}$ est croissante majorée donc convergente

et $(a_n)_{n\geq 0}$ est dans $\mathcal{S}_1$. Soit $\underline{\mathcal{S}_1^+ = \mathcal{S}_2^+}$.

En conclusion, si on se restreint aux suites positives

on a $\underline{\mathcal{S}_1^+ = \mathcal{S}_2^+ = \mathcal{S}_3^+}$.

<u>Remarque</u>: cette partie de la démonstration était totalement inutile!

Or a $\mathcal{S}_1^+ \subset \mathcal{S}_2^+ \subset \mathcal{S}_3^+$ et $\mathcal{S}_3^+ = \mathcal{S}_1^+$

donc $\mathcal{S}_1^+ = \mathcal{S}_2^+ = \mathcal{S}_3^+$.

Partie II.

II. 1er a) Remarquons que $\lim\limits_{x\to 1^-} x^k = 1^-$ pour tout k, $0\leq k\leq d$.

Ensuite $\forall x\in[0,1[$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k x^{nk}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^k)^n\right)$$

(ce calcul justifie d'ailleurs l'existence du membre de gauche)

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^k)^n\right) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k\, \ell = \ell\, p(1).$$

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = \ell\, p(1)$$

II. 1er b). Comme dans la question précédente, un argument de linéarité permet de se placer dans le cas où $q(X) = X^k$.

Or a alors $\forall x\in[0,1[$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{(k+1)n} = \dfrac{1}{1-x^{k+1}}$

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1+\dots+x^k} = \dfrac{1}{k+1}$.

Par linéarité, si $q = \sum\limits_{k=0}^{d'} \beta_k X^k$

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \sum_{k=0}^{d'} \frac{\beta_k}{k+1} = \int_0^1 q(x)\,dx.$$

II. 2e) le résultat qui est admis est le théorème de Weierstrass que vous devez savoir démontrer.

Commençons par remarquer qu'il existe deux fonctions continues sur $[0,1]$, notées f_1 et f_2 telles que.

$$f_1 \leq \varphi \leq f_2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 (f_2 - f_1)(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

* Commençons par remarquer que si $\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \psi(x) = \psi(\frac{1}{2})$ alors ψ est continue et on peut prendre $f_1 = f_2 = \psi$

* On peut donc, quitte à raisonner par symétrie, supposer que $\alpha = \lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \psi(x) < \psi(\frac{1}{2})$.

D'autre part ψ est continue par morceaux donc minorée et majorée.

$\exists (m, M) \ \forall x \in [0,1] \quad m \leq \psi(x) \leq M(x)$.

Soit $\eta > 0$, on suppose $\eta < \frac{1}{2}$, ce qui ne nuit en rien.

La fonction
$$\theta_1 : \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+\eta\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\psi(x) - \alpha}{x - \frac{1}{2}}$$
est continue et tend vers $+\infty$ en $\frac{1}{2}$, elle atteint donc sont minimum en ~~un~~ x_1 de $\left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\eta\right]$.

On définit alors la fonction f_1 par.

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}[\quad f_1(x) = \psi(x)$

$f(\frac{1}{2}) = \alpha$

f_1 est affine sur $[\frac{1}{2}, x_0]$

$\forall x \in [x_1, 1] \quad f_1(x) = \psi(x)$

f_1 est continue sur $[0,1]$ $\quad \forall x \quad f_1(x) \leq \psi(x)$ et $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \in [m, M]$.

De plus $\displaystyle\int_0^1 (\psi(x) - f_1(x))\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{x_1} \psi(x) - f_1(x)\,dx \leq (M-m) \times (x_1 - \tfrac{1}{2}) \leq (M-m)\eta$

On construit de manière similaire f_2 vérifiant

$\forall x \in [0,1] \quad \psi(x) \leq f_2(x)$, f_2 continue

et $\displaystyle\int_0^1 (f_2(x) - \psi(x))\, dx \leq (M-m)\,\eta$, en

considérant $\theta_2 : [\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ qui atteint aussi un minimum.

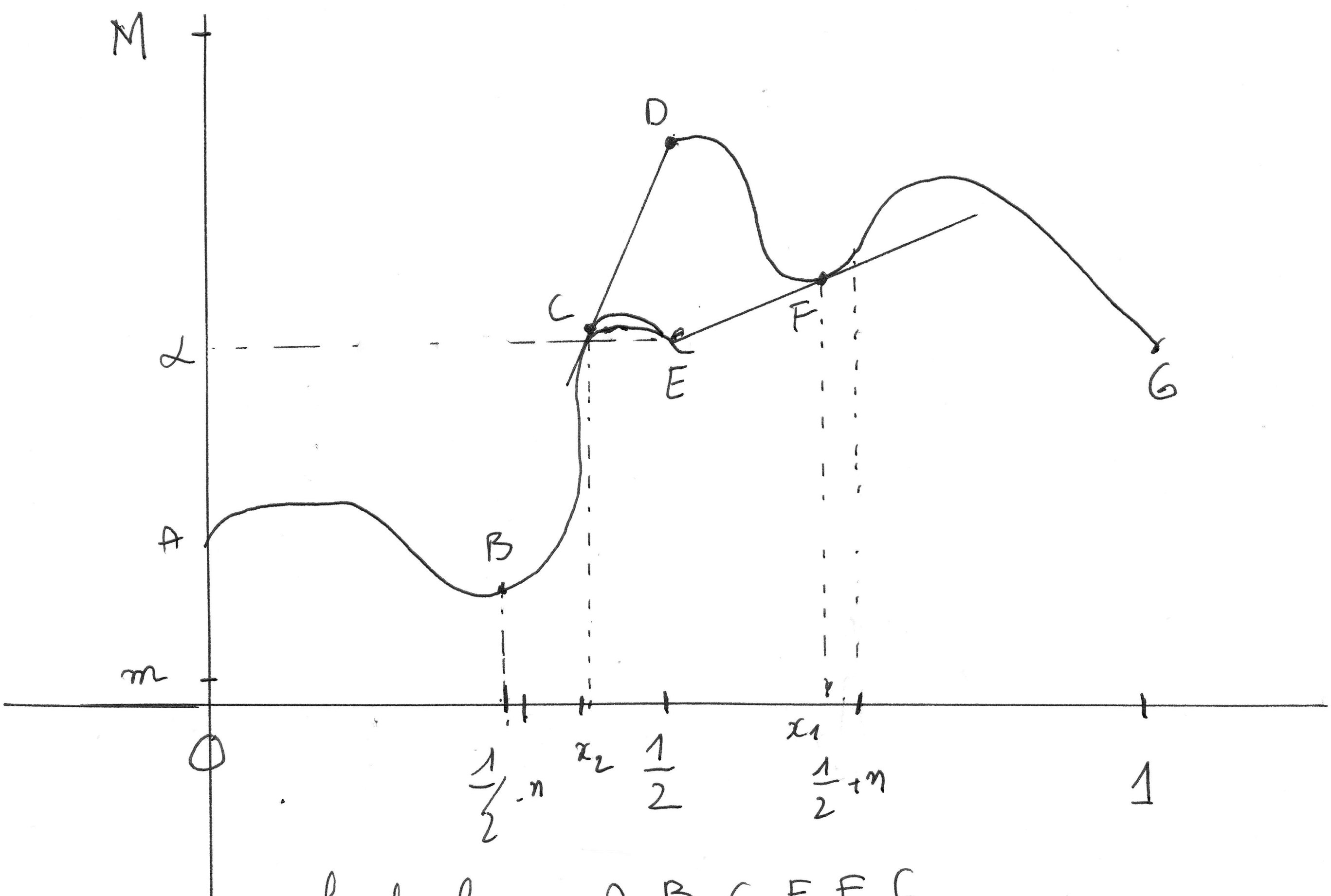
$$x \longmapsto \frac{\psi(\frac{1}{2}) - \psi(x)}{\frac{1}{2} - x}.$$

—

PS : Justification de $\forall x \in]\frac{1}{2}, x_1]$ $f_1(x) \leq \psi(x)$.

$\forall x \in]\frac{1}{2}, x_1]$ $\quad \dfrac{f_1(x) - \alpha}{x - \frac{1}{2}} \leq \dfrac{\psi(x) - \alpha}{x - \frac{1}{2}}$. donc $f_1(x) \leq \psi(x)$.

En choisissant $\underline{\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{4} \times \frac{1}{M-m}, \frac{1}{4}\right)}$ on obtient le résultat voulu.



graphe de f_1	A B C E F G
graphe de f_2	A B C D F G

Une fois déterminées f_1 et f_2, on considère

$\tilde{f}_1 = f_1 - \frac{\varepsilon}{8}$ $\qquad \tilde{f}_2 = f_2 + \frac{\varepsilon}{8}$

D'après le théorème de Weierstrass il existe deux polynôme q_1 et q_2 tels que. $\|\tilde{f}_1 - q_1\| \leq \frac{\varepsilon}{8}$ et $\|\tilde{f}_2 - q_2\| \leq \frac{\varepsilon}{8}$

On a alors $\forall \varepsilon$ $\quad f_1(x) - \frac{\varepsilon}{4} \leq q_1(x) \leq f_1(x) \leq \psi(x) \leq f_2(x) \leq q_2(x) \leq f_2(x) + \frac{\varepsilon}{4}$

Soit $\quad q_1 \leq \psi \leq q_2$

et $\quad \int_0^1 q_2(x) - q_1(x) \leq \int_0^1 f_2(x) - f_1(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{3\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.$

q.e.d.

II.3° a) Soit $[a,b]$ un intervalle compact contenu dans $[0,1[$.

$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad b^n < \frac{1}{2}$, donc $\forall x \in [a,b] \ \forall n \geq n_0 \ \chi(x^n) = 0$

On a donc $\forall x \in [a,b]$ $\quad |a_n \chi(x^n)| \leq |a_n|$ si $n \leq n_0$

$|a_n \chi(x^n)| \leq 0$ si $n \geq n_0$.

Or $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge où $\alpha_n = 0$ si $n \geq n_0$ $\quad \alpha_n = |a_n|$ si $n < n_0$.

donc $\sum_{n\geq 0} [x \mapsto a_n \chi(x^n)]$ converge normalement sur $[a,b]$

donc uniformément.

II.3° b) On cherche p_1 et p_2 sous la forme

$p_1 = X(1 + (1-X)q_1) \qquad p_2 = X(1 + (1-X)q_2)$

Pour de tels polynômes on a.

$p_1(0) = 0 \leq \chi(0) = 0 \leq p_2(0) = 0 \qquad p_1(1) = 1 \leq \chi(1) = 1 \leq p_2(1) = 1$.

et $\quad \int_0^1 \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}\, dx = \int_0^1 q_2(x) - q_1(x).\, dx$

On cherche donc deux polynômes tels que

$\forall x \in]0,1[\quad x(1+(1-x)q_1(x)) \leq \chi(x) \leq x(1+(1-x)q_2(x))$

$\forall x \in]0,1[\qquad q_1(x) \leq \dfrac{\chi(x)-x}{x(1-x)} \leq q_2(x)$

Or $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\qquad \psi(x) = \dfrac{\chi(x)-x}{x(1-x)} = -\dfrac{1}{1-x}$.

$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1[\qquad \psi(x) = \dfrac{\chi(x)-x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x}$.

ψ peut bien prolongée par continuité en 0 et 1. On peut donc lui appliquer les résultat de la question II.2$^{\text{er}}$) ce qui prouve l'existence de q_1 et q_2, donc de p_1 et p_2.

II.3^{e}.c) Puisque $\forall x \in [0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad p_1(x^n) \leq \chi(x) \leq p_2(x^n)$ et $a_n \geq 0$, ces deux ~~sommes~~ différences sont positives et majorées par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(p_2(x^n) - p_1(x^n)\right)$$

puis pour $x \in]0,1[$ par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n(1-x^n) \underbrace{\frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{x^n(1-x^n)}}_{= q_2(x^n) - q_1(x^n)}$$

D'autre par $\forall x \in [0,1[\quad (1-x^n) = (1-x)(1+\cdots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$

Donc ces différences sont majorée par.

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^n (q_2(x^n) - q_1(x^n))$$

puis par

$$\underline{M(x) = A \cdot (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n (q_2(x^n) - q_1(x^n))}.$$

(dans la suite on suppose $A \geq 0$, ce qui n'apporte aucune restriction)

D'après II.1°.b) $\underline{\lim\limits_{x\to 1^-} \Pi(x) = A\int_0^1 q_2(x)-q_1(x)\,dx \le A\varepsilon.}$

Donc $\underline{\exists \eta > 0 \quad \forall x \in [1-\eta, 1[. \quad \Pi(x) \le A\varepsilon + \varepsilon = (A+1)\,\varepsilon.}$

q.e.d.

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [1-\eta, 1[.$

$$\underline{-(A+1)\,\varepsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_1(x^n) \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \chi(x^n) \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_2(x^n) + (A+1)\varepsilon}$$

Or $\underline{\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_1(x^n) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_2(x^n) = \ell}$

d'après II.1°.a), puisque $p_1(1) = p_2(1) = 1$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta_1$ (qu'on suppose $> \eta$) tel que.

$\forall x > 1 - \eta_1$

$$\underline{\ell - (A+2)\,\varepsilon \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \chi(x^n) \le \ell + (A+2)\,\varepsilon}$$

On en déduit en choisissant un ~~x_0~~

Or pour $\underline{x = \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}}}$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

et $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}} = 1.$, donc

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall N \ge N_0$

$$\underline{\ell - (A+2)\varepsilon \le \sum_{n=0}^{N} a_n \le \ell + (A+2)\varepsilon}$$

ce qui veut exactement dire $\underline{\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \ell}$

et en particulier que S converge.

II.3ème.d) Soit N_1 tel que $\frac{1}{2^{\frac{1}{N_1}}} \geq 1-\eta_1$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N_1$ $\frac{1}{2^{1/n}} \in [1-\eta_1, 1[$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \chi\left(\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \in [\ell-(A+2)\varepsilon, \ell+(A+2)\varepsilon].$$

De plus $\forall x \in [1-\eta_1, 1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \chi(x^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2^{1/n}}. \\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \chi(x^k) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \chi\left(\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)^k\right) & \text{si } x \geq \frac{1}{2^{1/n}}. \end{cases}$$

On en déduit

$\forall x \in [1-\eta_1, 1[$. $\forall n \geq N_1$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \chi(x^k) \in [-2(A+2)\varepsilon, 2(A+2)\varepsilon].$$

quitte à partir de $\frac{\varepsilon}{2(A+2)}$ on en déduit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad \forall x \in [1-\eta_1, 1[\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \chi(x^k)\right| \leq \varepsilon$$

Or d'après II.3ème a) et la convergence uniforme sur $[0, 1-\eta_1]$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad \forall x \in [0, 1-\eta_1] \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \chi(x^k)\right| \leq \varepsilon$$

En choisissant $N_3 = \max(N_1, N_2)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_3 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \chi(x^k)\right| \leq \varepsilon$$

c'est exactement la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} a_n \chi(x^n)$ sur le segment $[0, 1]$.

II.4ème.a) La suite $(-b_n)_{n\geq 0} = (a_n)_{n\geq 0}$ vérifie clairement les hypothèses précédentes, donc ~~est dans~~ $\sum a_n$ converge et par conséquent $\sum b_n$ converge.

II.4ème b) On prend $b_n = \frac{1}{p^2}$ si $n = p^4$, $b_n = 0$ sinon.

Alors $(b_n)_{n\geq 0}$ est dans S_1 (positive à somme partielles majorée) donc dans S_3, $\forall n \quad n b_n \geq 0 = B$. Mais $\lim\limits_{p\to+\infty} p^4 b_{p^4} = +\infty$ donc $\sup n b_n = +\infty$

II.4ème.c) On écrit $c_n = a_n + i b_n \quad a_n \in \mathbb{R} \quad b_n \in \mathbb{R}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on vérifie facilement que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{\geq 0}$ sont dans S_3. De plus puisque $|a_n| \leq |c_n| \quad |b_n| \leq |c_n|$, il existe A $(= C)$ et B tel que $n a_n \leq A$ et $n b_n \geq B$.

Donc $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ convergent et finalement $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ converge.

II.4ème.d) La série $\sum\limits_{n\geq 0} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{d_n}$ est convergente d'après la règle de Leibniz, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n+1}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+2}} = -\infty$, donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n d_n = -\inf_{n\in\mathbb{N}} n d_n = +\infty$$

[Cette quatrième question était bien facile après l'Everest des 2ème et 3ème questions]