Partie I : Le théorème de Cayley-Hamilton

Nous proposons ici deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton. Une troisième est disponible dans mon cours en ligne.

Exercice 1: *Première démonstration de Cayley-Hamilton*
E est un espace vectoriel de dimension finie n. u est un endomorphisme de E. On note χ_u le polynôme caractéristique de u. On veut prouver que $\chi_u(u) = 0$. Il suffit pour cela de prouver que pour tout x non nul $\chi_u(u)(x) = 0$. On supposera $n \geq 1$; pour $n = 0$ le résultat est vrai (mais sans grand intérêt).
On fixe un élément x non nul de E. On note F le plus petit sous-espace stable par u contenant x.
1) Montrer que F existe bien.
2) Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $(x, \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre et $(x, \dots, u^p(x))$ liée.
3) Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{x, \dots, u^{p-1}(x)\}$.
4) Montrer que $\mathcal{B} = (x, \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F.
On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F.
5) Quelle est la matrice de de $\tilde{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ si

$$u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x)?$$

6) Calculer le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$ noté $\chi_{\tilde{u}}$.
7) Montrer que $\chi_{\tilde{u}}(\tilde{u})(x) = 0 = \chi_{\tilde{u}}(u)(x)$.
8) Montrer que $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u.
9) Conclure.

Exercice 2: *Deuxième démonstration de Cayley-Hamilton*
On se donne un espace vectoriel E de dimension finie n (≥ 1) et u un endomorphisme de E, χ_u son polynôme caractéristique.
On suppose d'abord que le corps de base est $\mathbb{C}$. On peut alors démontrer que u est trigonalisable sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. En effet χ_u est scindé, il peut s'écrire

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice $(m_{i,j})$ de u est triangulaire supérieure, avec pour tout i $m_{i,i} = \lambda_i$.
On définit le drapeau $(F_0, \dots, F_n)$ en posant $F_i = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$.
1) Montrer que $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(F_i) \subset F_{i-1}$.
2) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour les endomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
3) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton dans $M_n(\mathbb{C})$ puis $M_n(\mathbb{R})$.
4) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour les endomorphismes de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Partie II : Automorphimes d'algèbre de $L(E)$

Exercice 3: Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, de dimension finie, notée n dans la suite.

1) Soit w dans $GL(E)$. Montrer que l'application

$$\Phi_w : u \mapsto wuw^{-1}$$

est un automorphisme d'algèbre.

On se propose de montrer la réciproque, c'est-à-dire que si Φ est un automorphisme d'algèbre de $L(E)$ alors il existe w dans $GL(E)$ tel que $\Phi = \Phi_w$.

Soit Φ un automorphisme de l'algèbre $L(E)$. Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

2) Montrer que pour tout (i, j) dans $[1, n]^2$ il existe un unique endomorphisme $u_{i,j}$ de E dont la matrice est $E_{i,j}$. On définit, pour tout (i, j) dans $[1, n]^2$, l'endomorphisme $v_{i,j}$ par $v_{i,j} = \Phi(u_{i,j})$.

3) Montrer que $(v_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $L(E)$ et que

$$\forall (i, j, k, l) \in [1, n]^4 \quad v_{i,j}v_{k,l} = \delta_{j,k}v_{i,l},$$

où δ est le symbole de Kronecker. En déduire en particulier que les $p_i = v_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$, sont des projecteurs non nuls.

4) En partant de l'identité $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}$, que l'on justifiera, montrer que les p_i sont des projecteurs de rang 1 dont les images sont supplémentaires. En particulier, expliquer qu'il est possible de trouver une base $\mathcal{B}_1 = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que pour tout i, (f_i) soit une base de $\mathrm{Im}\ p_i$.

5) Montrer que si i, j et k sont trois entiers de $[1, n]$ alors $v_{i,j}(f_k) = 0$ si $k \neq j$ et $v_{i,j}(f_j) = \alpha_{i,j}f_i$ pour un $\alpha_{i,j}$ dans $\mathbb{K}$.

6) Montrer que, pour tout triplet (i, j, k) on a

$$\alpha_{i,j}\alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}.$$

7) Que vaut $\alpha_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire que les $\alpha_{i,j}$ sont non nuls, puis qu'il existe $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ une famille de scalaires non nuls tels que

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2 \quad \alpha_{i,j} = \frac{\beta_i}{\beta j}.$$

8) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de E telle que

$$\forall (i, j, k) \in [1, n]^3 \quad v_{i,j}(\epsilon_k) = \delta_{j,k}\epsilon_i.$$

9) En déduire l'existence d'un automorphisme w de E tel que $\Phi = \Phi_w$.

Partie III : Exercices supplémentaires

On revient ici sur certains exercices d'algèbre linéaire que nous n'avons pas résolus. On les présentes ici avec des indications permettant d'aider à les résoudre.

Exercice 4: *(Mines)* Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, B de rang 1. Montrer que

$$\det(A+B)\det(A-B) \leq (\det A)^2.$$

Indication : Une hypothèse simplificatrice consiste à supposer que toute les colonnes de B sont proportionnelles à la première. On utilise en suite la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne et les opérations élémentaires sur les colonnes pour prouver $\det(A+B) = \det A + \det B'$, où B' est la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de A par la première colonne de B.

Exercice 5: *(Mines)* Soit E un espace vectoriel et S une partie de $L(E)$. On dit que S est dense dans $L(E)$ si, pour tout ensemble fini I et tout couple de familles libres de vecteurs de E, $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ indexées par I, il existe f dans S tel que $\forall i \in I\ f(u_i) = v_i$.
1) On suppose E de dimension finie, montrer que S est dense si et seulement si S contient $GL(E)$.
2) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de rang fini est dense.
Indication : On pourra admettre que tout sous-espace possède un supplémentaire. Se rappeler aussi qu'une application linéaire est définie de manière unique par ses restrictions à deux sous-espaces.
3) Déterminer le commutant d'une partie dense.
Indication : Si v n'est pas une homothétie, il existe x tel que $(x, v(x))$ est libre (contaposée d'un exercice classique).

Exercice 6: *(Polytechnique)* Soit $(V_1, \ldots, V_p)$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ dont la réunion est $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'un d'entre eux est égal à $\mathbb{R}^n$.
Indication : Remplacer $\mathbb{R}^n$ par un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. Démontrer le résultat par récurrence sur n. Vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $n \geq 2$, si H est un hyperplan de E et si aucun des V_i n'est E, utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer que H est l'un des V_i. Conclure en prouvant qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au moins 2 possède une infinité d'hyperplans distincts.

Exercice 7: *(Polytechnique)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T(P) = P(X+1)$ et D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $D(P) = P'$.
1) Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec D.
Indication : Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n d'un espace de dimension n alors il existe x tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E (le prouver !). Si v commute avec u, poser $v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x)$ et prouver $v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i$.
2) Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec T.
Indication : Se ramener au cas précédent en faisant apparaître $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

Exercice 8: *(Polytechnique)* Montrer que tout élément de $L(M_n(\mathbb{K}))$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui conserve le déterminant conserve le rang.
Indication : Plan d'attaque (on note f un tel élément) :
- Montrer que pour toute matrice non nulle B il existe une matrice A inversible telle que $A + B$ ne soit pas inversible. En déduire que f est injecive, puis surjective. (C'est hypothèse de surjectivité fait parfois partie de l'énoncé.)
- On a pour tout t dans $\mathbb{R}$ et tout (A, B) dans $M_n(\mathbb{R})^2$ $\det(A + tB) = \det(f(A) + tf(B))$. (Certains énoncés partent de cette simple conditio, sans supposer f linéaire.)
- Montrer que si B est de rang égal à r $\det(A + tB)$ est une fonction polynomiale de degré au plus r et il existe A telle que $\det(A + tB)$ est exactement de degré r (penser à l'équivalence de matrices).
- Conclure.

Exercice 9: *(Polytechnique)* Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ des nombres réels. Montrer que le déterminant de la matrice $(e^{a_i b_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est strictement positif.
Indication : On raisonne par récurrence sur n.
- Remplacer b_n par x. Soit f la fonction obtenue. Montrer qu'elle est de la forme
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{a_k x}.$$
- Déterminer le signe de f au voisinage de $+\infty$.
- Donner $n - 1$ valeurs distinctes où f s'annule.
- En utilisant le théorème de Rolle montrer que f ne peut posséder n zéros distincts (factoriser une exponentielle avant de dériver). Conclure.

****

Ceux qui sont arrivés au terme de ce devoir peuvent encore s'attaquer aux exercices ENS de la même feuille de TD.