E.N.S. FONTENAY- SAINT CLOUD

Option Mathématiques

Mathématiques I I

DURÉE : 4 heures

PROBLÈME

Les diverses parties de ce problème ne sont pas indépendantes; on pourra donc utiliser pour la résolution d'une question les résultats des questions antérieures.

L'attention des candidates et candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le plus grand compte lors de la correction, de la rigueur des raisonnements et, de manière générale, de la clarté de la rédaction.

I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à n.

1º Étudier la restriction à chacun des espaces E_n de l'application Δ de l'espace vectoriel des polynômes rationnels dans lui-même qui associe au polynôme P le polynôme $\Delta(P)$ tel que, pour tout x,

$$\Delta(P)(x) = P(x) - P(x-1).$$

2º *a*. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n appartenant à E_{n+1} et un seul tel que, pour tout entier naturel p strictement supérieur à 0, $Q_n(p)$ soit égal à la somme des puissances n-ièmes des entiers naturels strictement inférieurs à p.

b. Montrer que le polynôme Q_n vérifie les égalités :

$$Q_n(0) = Q_n(1) = 0.$$

3º Montrer qu'il existe une suite (a_n) de nombres rationnels, définie pour n supérieur ou égal à 2, telle que l'on ait

$$Q'_n + a_n = n\,Q_{n-1} \qquad \text{pour } n \geqq 2$$

où Q'_n désigne le polynôme dérivé du polynôme Q_n.

4º On désigne par $\bar{Q}_n$ le polynôme vérifiant identiquement

$$\bar{Q}_n(x) = Q_n(1-x).$$

Comparer les polynômes $\bar{Q}_n$ et Q_n.

5º Calculer $Q_{2p}(1/2)$ et a_{2p+1}.

6º Établir que les polynômes Q_{2p} ne s'annulent sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ qu'au point 1/2 et que les polynômes Q_{2p+1} sont de signe constant sur ce même intervalle.

7º On désigne par $\sigma(p)$ l'entier égal à $+1$ ou -1 représentant le signe constant de la fonction Q_{2p-1} sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Montrer que a_{2p} n'est pas nul et qu'il est de signe $\sigma(p)$.

8º En étudiant la fonction Q_{2p+1} au voisinage de 0, montrer que $\sigma(p)$ est égal à $(-1)^p$.

9º Montrer que la suite de polynômes Q_n est entièrement déterminée par le polynôme $Q_1 = x(x-1)/2$ et les relations de récurrence

$$Q'_{n+1} = (n+1)\,Q'_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0$$

10º On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p . a_{2p}$.

Calculer les nombres B_1, B_2 et B_3.

II

Les polynômes Q_n et les nombres B_n sont ceux introduits dans la première partie.

Conformément à l'usage, on dit qu'une fonction réelle continue f définie sur un segment $[a, b]$ est p fois continuement dérivable sur ce segment si elle est dérivable jusqu'à l'ordre p sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si ses p premières dérivées sur $]a,b[$ sont les restrictions de fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On se permettra donc l'abus d'écriture usuel consistant, par exemple, à noter $f'(a)$ ce qui est en fait la dérivée à droite $f'_d(a)$.

1° Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0, 1]$.

Montrer l'égalité

$$f(1) - f(0) = (1/2).(f'(0) + f'(1))$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p . \mathrm{B}_p}{(2p)!} . (f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0))$$
$$+ \mathrm{R}_n$$

où le reste R_n est égal à l'intégrale

$$(1/(2n+1)!) . \int_0^1 \mathrm{Q}_{2n+1}(x) . f^{(2n+3)}(x)\, dx$$

2° Montrer que la valeur absolue de R_n est majorée par

$$(\mathrm{B}_{n+1}/(2n+2)!) . \| f^{(2n+3)} \|$$

où $\| f^{(2n+3)} \|$ désigne la borne supérieure de la valeur absolue des nombres $f^{(2n+3)}(x)$ lorsque x décrit le segment $[0, 1]$.

3° Établir, pour une fonction $2n+2$ fois continuement dérivable sur un segment $[a, b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2, la formule de calcul approché de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2m} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{p=1}^{m-1} f\left(a + p\,\frac{b-a}{m} \right) \right)$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p . \mathrm{B}_p}{(2p)!} . \left(\frac{b-a}{m} \right)^{2p} . (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a))$$
$$+ \mathrm{R}'_n$$

où la valeur absolue du reste R'_n est majorée par

$$\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{(2n+2)!} . m . \left(\frac{b-a}{m} \right)^{2n+3} . \| f^{(2n+2)} \|$$

où $\| f^{(2n+2)} \|$ est la borne supérieure de la valeur absolue des nombres $f^{(2n+2)}(x)$ lorsque x décrit le segment $[a, b]$.

4° *Application numérique.* On considère la fonction $y = 1/x$ sur le segment $[1, 2]$. L'entier n étant choisi égal à 2, comment faut-il choisir le nombre m d'intervalles du partage pour que le reste R'_n soit inférieur à 10^{-8} en valeur absolue ?

Donner une expression d'un nombre rationnel qui approche Log (2) à 10^{-8} près.

III

1° Soit m un entier naturel et n un entier supérieur ou égal à 1.

Établir l'égalité :

$$\int_0^1 \mathrm{Q}_{2m+1}(t) \cos(2\pi nt)\, dt = (-1)^m . \frac{(2m+1)!}{(2\pi n)^{2m+2}}$$

2° Donner une expression intégrale de la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} \frac{1}{n^{2m+2}}$$

3° Montrer que la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ par

$$g(x) = \mathrm{Q}_{2m+1}(x) / \sin(\pi x)$$

est la restriction d'une fonction continuement dérivable sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

4° Achever le calcul, pour tout entier naturel m, de la somme de la série de terme général $1/n^{2m+2}$.