Polytechnique MP 2006 Maths I

Première partie

1) La solution de $C_{1,\alpha}$ est $f(x)=\alpha e^x$, définie sur $\mathbb{R}$
($f'=f$ donc $f=ce^x$, $f(0)=\alpha$ donc $c=\alpha$)

2) Si $f'(x)=f(-x)$, alors $f''(x)=-f'(-x)=-f(x)$
Donc $f''+f=0$, et f est de la forme $A\cos x+B\sin x$
A et B, réels.
La condition $f'(x)=f(-x)$ devient $-A\sin x+B\cos x=A\cos x-B\sin x$
soit $f(x)=A(\cos x+\sin x)$; la condition $f(0)=\alpha$, donne finalement.
La solution de $C_{-1,\alpha}$ est $f(x)=\alpha(\cos x+\sin x)$ définie sur $\mathbb{R}$

3.a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left|\alpha\,\gamma^{n(n-1)/2}\dfrac{x^n}{n!}\right|\leq\dfrac{|x|^n}{n!}|\alpha|$ et
$\sum_{n\geq0}|\alpha|\dfrac{|x|^n}{n!}$ converge (vers $|\alpha|e^{|x|}$). Donc la série entière converge (absolument) pour tout réel x
En particulier son rayon de convergence est $+\infty$ et sa somme f est $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et dérivée est obtenue par dérivation terme à terme : $f'(x)=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma^{\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}}(n+1)\dfrac{x^n}{(n+1)!}=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma^{\frac{(n+1)n}{2}}\dfrac{x^n}{n!}$

Il suffit de remarquer que $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}+n$, pour obtenir
$f'(x)=f(\gamma x)$, $f(0)=\alpha$. f est bien solution sur $\mathbb{R}$ de $C_{\gamma,\alpha}$

3.b) Si $|\gamma|>1$ et si x est non nul, posons (si $\alpha\neq0$)
$u_n=|\alpha|\dfrac{|x|^n}{n!}|\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}}$, alors u_n est non nul pour tout n
~~et~~ $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{|x|\,|\gamma|^n}{n+1}$, donc
$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty>1$ et $\sum u_n$ est divergente. (Pour $\alpha=0$ la série converge sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle solution de $C_{\gamma,0}$).
La condition $|\gamma|\leq1$ était donc utile

4a) $\forall(g,h)\in E_A$ $\forall x\in[-A,A]$
$|(T_Ag)(x)-(T_Ah)(x)|\leq|x|\times\sup_{t\in[-A,A]}|(g-h)(\gamma t)|\leq A\,\|g-h\|$

Donc $\|T_A(g)-T_A(h)\|\leq\|g-h\|$
T_A est lipschitzienne donc continue sur E_A

4.b) * Si pour tout $A > 0$ f vérifie $T_A f_{|[-A,A]} = f_{|[-A,A]}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t)\,dt \qquad (E_\alpha)$$

Réciproquement si f continue sur $\mathbb{R}$ vérifie E_α alors $f_{|[-A,A]}$ est clairement un point fixe de T_A pour tout A.

Si f vérifie (E_α), alors puisque $t \mapsto f(\gamma t)$ est continue f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = f(\gamma x)$, de plus $f(0) = \alpha$ donc f est solution de $C_{\gamma,\alpha}$

Réciproquement si f est solution de $C_{\gamma,\alpha}$ alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x$ $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\cancel{\gamma}t)\,dt = \alpha + \int_0^x f'(\gamma t)\,dt$

Finalement :

f solution de $\mathcal{C}_{\gamma,\alpha} \Leftrightarrow f$ solution de $(E_\alpha) \Leftrightarrow f_{|[-A,A]}$ point fixe de T_A.

4.c) Pour $n = 0$ l'inégalité résulte de la définition de $\| \;\|$

$$\forall x \qquad |g(x) - h(x)| \leq |\gamma|^0 \frac{|x|^0}{0!} \|g - h\| = \|g - h\|$$

On établit ensuite la relation par récurrence, en supposant le résultat vrai à l'ordre n.

$$\forall x \in [-A,A] \; \left|\left((T_A^{n+1} g)(x) - (T_A^{n+1} h)(x)\right)\right| \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |(T_A^n g)(\gamma t) - (T_A^n h)(\gamma t)|\,dt$$

Dans le cas x positif (le cas $x \leq 0$ se traite de même en remplaçant $|\gamma t|$ par $(-\gamma t)$)

$$\forall x \in [0,A] \; |(T_A^{n+1} g)(x) - (T_A^{n+1} h)(x)| \leq \int_0^x |\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(|\gamma| t)^n}{n!} \|g - h\|\,dt$$

$$\leq |\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2} + n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \|g - h\| = |\gamma|^{\frac{(n+1)n}{2}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \|g - h\|$$

Ceci prouve le résultat à l'ordre $n+1$

4d) En passant à la borne supérieure dans l'inégalité de 4.c) on obtient

$$\|T_A^n g - T_A^n h\| \leq \frac{|\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}} |A|^n}{n!} \|g - h\|$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{|\gamma|^{\frac{n(n+1)}{2}} |A|^n}{n!} = 0$, donc il existe $n(A)$ tel que

$\frac{|\gamma|^{\frac{n(A)(n(A)-1)}{2}} |A|^{n(A)}}{(n(A))!} \leq \frac{1}{2} = k$. On aura alors $\|T_A^{n(A)}(g) - T_A^{n(A)}(h)\| \leq k \|g - h\|$

4.b)

Si g et h sont solutions de $(C_{\gamma,\alpha})$ et si g_A et h_A désignent leurs restrictions à $[-A,A]$, alors g_A et h_A sont des points fixes de T_A. On aura aussi par itération $T_A^{n(A)} g_A = g_A$ $T_A^{n(A)} h_A = h_A$. Par conséquent

$$\| g_A - h_A \| \leq \| T_A^{n(A)} g_A - T_A^{n(A)} h_A \| \leq k \| g_A - h_A \|$$

Puisque $k < 1$, il en résulte $\| g_A - h_A \| \leq 0$, c'est-à-dire $h_A = g_A$.
$\forall A \in \mathbb{R}^+$ $h_A = g_A$, donc $h = g$ et la solution est unique.

Remarque : En prenant $f_0 = 0$ par exemple puis $f_n = T_A f_{n-1}$ on aurait prouvé de même que $\| f_{n+1} - f_n \| \leq |\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{A^n}{n!} \| f_1 - f_0 \|$. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est normalement convergente sur $[-A,A]$ donc uniformément convergente sur $[-A,A]$. La convergence uniforme implique la convergence simple. Il en résulte que la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \alpha + \int^x f_n(\gamma t)\,dt$ converge simplement vers une fonction f, et uniformément sur tout segment $[-A,A]$. En considérant le segment $[\min(0,x), \max(0,x)]$ on peut passer à la limite ci-dessus et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t)\,dt$. On obtient ainsi l'existence d'une solution de $C_{\gamma,\alpha}$. Avec le même plan on peut démontrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy linéaire.

5a) $f_\gamma(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$, donc

$$| f_\gamma(x) - (1+x) | \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{|x|^n}{n!} \leq |\gamma| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq |\gamma| e^{|x|}$$

Par conséquent $\lim_{\gamma \to 0} f_\gamma(x) = 0$

5b) L'auteur du sujet a mal lu le programme, La différentiabilité d'une fonction n'est définie que lorsque la fonction est définie sur un ouvert

④

Posons $u_n(\gamma, t) = \gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{x^n}{n!}$, u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial^{k+l} u_n}{\partial \gamma^k \partial t^l} = \gamma^{\frac{n(n-1)}{2} - k} \cdot \dfrac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}{\left(\frac{n(n-1)}{2} - k\right)!} \, t^{n-l} \times \dfrac{n!}{(n-l)!} \times \dfrac{1}{n!}$

si $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ et $l \leq n$, 0 sinon.

On en déduit $\displaystyle\sup_{[-1,1]\times[-A,A]} \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \gamma^k \partial t^l} u_n \right| \sim \frac{n^{2k}}{2^k} \frac{n^l A^{n-l}}{n!}$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\partial^{k+l}}{\partial \gamma^k \partial t^l} u_n$ converge normalement donc uniformément sur toute partie $[-1,1]\times[-A,A]$. Il en résulte, par récurrence sur l'ordre de dérivation, que toutes les dérivées partielles de F existent sur $[-1,1]\times\mathbb{R}$ (théorème sur la dérivation de la somme d'une série de fonctions d'une variable) et sont continues (théorème sur la continuité de la somme d'une série de fonctions de deux variables).
Si on se restreint à $]-1,1[\times\mathbb{R}$ il résulte d'une caractérisation donnée dans le cours que F est $\mathcal{C}^\infty$. Sur $[-1,1]\times\mathbb{R}$, on peut prendre cela comme définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un produit d'intervalle).

5.c) $\gamma \in [0,1]$. Pour $x \geq 0$ $f_\gamma(x)$ et $f_\gamma'(x) = f(\gamma x)$ sont positives. Donc f est positive et croissante.
Pour $x \in [-1, 0]$ $\displaystyle f_\gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} |x|^n}{n!}}_{\alpha_n}$.

Or (α_n) tend vers zéro en décroissant, donc $f_\gamma(x)$ est la somme d'une série vérifiant le critère de Leibniz. $f_\gamma(x)$ est du signe de α_0, donc f_γ est positive sur $[-1,0]$, puis sur $\mathbb{R}$. De plus de $f'(x) = f(\gamma x)$ on en déduit que f_γ est croissante sur $[-1, +\infty[$.
$\forall x \geq 0$ $f_\gamma(x) \geq 1 + x$ donc $\lim_{x \to +\infty} f_\gamma(x) = +\infty$

6) Sous les hypothèses (i), si on pose $u_n(x) = c_n e^{\gamma^n x}$ les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont des séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui convergent en 0 (car $|c_n| \leq K_r |\gamma^n|$ donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge absolument), et dont les séries des dérivées $\sum_{n\geq 0} u'_n$ et $\sum_{n\geq 0} u'_{-n}$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^-$. On en déduit que si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie (i) alors $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^-$. De plus

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u'_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \gamma^n e^{\gamma^n x}.$$

Or $f(\gamma x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\gamma^{n+1} x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-1} e^{\gamma^n x}$.

Pour que C_γ soit vérifiée il suffit que pour tout n dans $\mathbb{Z}$ on ait ~~[illegible]~~ $c_n \gamma^n = c_{n-1}$

Cette relation conduit à

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = c_0 \gamma^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ par récurrence sur n pour $n \geq 0$ et sur $-n$ pour $n \leq 0$.

Si $c_0 = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n = 0$ donc i est vérifiée.

Si $c_0 \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} (c_n \gamma^{|n|}) \times \gamma^{|n|} = 0$ donc

$|c_n| \gamma^n \underset{+\infty}{=} o(\gamma^{-n})$ $\quad |c_{-n}| \gamma^n \underset{+\infty}{=} o(\gamma^{-n})$ Puisque

$\sum_{n\geq 0} \gamma^{-n}$ converge, la condition (i) est vérifiée.

7) Une solution de (C_γ, α) sur $]-\infty, 0]$ est donc

$$f : x \mapsto \alpha c_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^{-\frac{n(n+1)}{2}} e^{\gamma^n x}$$

avec $c_0 = 1 / \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^{-\frac{n(n+1)}{2}}$

8) La condition (non nécessaire) devient $c_n \gamma^n = -c_{n-1}$.

⑥

Puis $c_n = (-1)^n c_0 \gamma^{-\frac{n(n+1)}{2}}$.

Il y a bien la vérification de la condition i)

le problème est que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = 0$ car $c_{-n-1} = -c_n$.

On obtient seulement une solution de $C_{\gamma,0}$.

~~En écrivant cette fonction $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ ... $f^{(0)}(x) = f(x) = \gamma^{0(0+1)/2}$~~

9) On démontre le résultat par récurrence sur $n \geq k$ à k fixé. S'il est vrai à l'ordre n une seule dérivation le donne à l'ordre $n+1$. Il ne reste qu'à le prouver à l'ordre k. C'est à dire

$$\forall k \ \forall x \in]0,+\infty[\quad f^{(k)}(x) = \gamma^{\frac{k(k-1)}{2}} f(\gamma^k x)$$

ce résultat, clair pour $k=0$, se démontre par récurrence sur k en remarquant $\frac{d}{dx} f(\gamma^k x) = \gamma^k f'(\gamma^k x) = \gamma^k f(\gamma^{k+1} x)$.

10) ψ est linéaire. Si $\psi(f) = 0$, alors $\forall p \geq 0$

$$\forall x \in I_{(p)} \quad f(x) = f^{(p)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right) \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} = (\psi(f))^{(p)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right) \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} = 0$$

Or $[1,+\infty[= \bigcup_{p \geq 0} I_{(p)}$ donc $f_{|[1,+\infty[} = 0$

Supposons $f_{|[\gamma^{-p},+\infty[} = 0$ $p \geq 0$

$\forall x \in [\gamma^{-p-1}, \gamma^{-p}]$ $f'(x) = f(\gamma x) = 0$

Donc f est constante sur $I_{(-p-1)}$ or $f(\gamma^{-p}) = 0$ donc

$$f_{|[\gamma^{-p-1},+\infty[} = 0.$$

Donc $\forall p \in \mathbb{Z}$ $f_{|[\gamma^p,+\infty[} = 0$, et $]0,+\infty[= \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [\gamma^p,+\infty[$

Par conséquent $f = 0$.

11) Si une telle f existe (f telle que $\psi(f) = g$)
alors d'après la question 9)
$\forall p \geq 0 \; \forall x \in I_{(p)} \; f(x) = \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} f^{(p)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right) = \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} g^{(p)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right)$

Or $\gamma^p \in I_{(p-1)} \cap I_{(p)}$ pour $p \geq 1$. On doit donc avoir

$\forall p \geq 1 \quad \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} g^{(p)}(1) = \gamma^{-\frac{(p-1)(p-2)}{2}} g^{(p-1)}(\gamma)$
Soit $\forall p \geq 0 \quad g^{(p+1)}(1) = \gamma^p g^{(p)}(\gamma)$ (Condition nécessaire)
Réciproquement, supposons que cette condition soit définie.
Et définissant f par $f_{(p)}(x) = \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2}} g^{(p)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right)$.
Alors f est continue.
De plus:
$\forall k \geq 0 \quad f_{(p)}^{(k)}(x) = \gamma^{-\frac{p(p-1)}{2} - kp} g^{(p+k)}\left(\frac{x}{\gamma^p}\right)$

et en particulier $f_{(p)}^{(k)}(\gamma^{p+1}) = f_{(p+1)}^{(k)}(\gamma^{p+1})$ d'après l'hypothèse. On peut donc recoller les $f_{(p)}$, et leurs dérivées
Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et par construction
$\forall p \geq 1 \quad f_p'(x) = f_{p+1}(\gamma x)$, donc $f'(x) = f(\gamma x)$ sur $[1, +\infty[$
et $f_{(0)}(x) = g(x)$
Supposons maintenant qu'on ait pu définir f sur $[\gamma^{-p}, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$
$p \geq 0$, et prolongeons la en posant
$\forall x \in [\gamma^{-p-1}, \gamma^{-p}]$: $\tilde{f}(x) = f(\gamma^{-p}) + \int_{\gamma^{-p}}^{x} f(\gamma t)\,dt$
Avec cette définition
$\forall x \in [\gamma^{-p-1}, \gamma^{-p}[\quad \tilde{f}'(x) = f(\gamma x)$
Donc $\lim_{x \to \gamma^{-p}} \tilde{f}'(x) = f(\gamma \cdot \gamma^{-p}) = f'(\gamma^{-p})$

Donc $\tilde{f}$ est bien un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$
En itérant le raisonnement $\tilde{f}$ est un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$

Le même argument que dans la question précédente permet de

(8)

définir f dans $\mathcal{C}_\gamma$ sur $]0,+\infty[$, et elle vérifie $\underline{\psi(f)=g}$

12.a) Il suffit d'appliquer la formule de la question 9 avec $n=p=k$ $x\in I_{(-p)}$ donc $f^{(p)}(x)=f^{(p)}_{(-p)}(x)$

de même $f(\gamma^p x)=f_{(0)}(x)$.

Ensuite en prenant $n=k$ $x=\gamma^{-p}$

$$f^{(k)}(\gamma^{-p}) = \gamma^{\frac{k(k-1)}{2}} f(\gamma^{k-p}) \qquad \text{Or } k-p\le p$$

donc $f^{(k)}(\gamma^{-p}) = f^{(k)}_{(-p)}(\gamma^{-p}) = 0$

12 b) $f_{(-p)}(x) = q_p\int_{\gamma^{-p}}^{x}(x-t)^{p-1}f_0(\gamma^p t)\,dt$ pour x dans $I_{(p)}$

car $f_{(-p)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(x-\gamma^{-p})^k}{k!}f^{(k)}_{(-p)}(\gamma^{-p}) + \int_{\gamma^{-p}}^{x}\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}f^{p}_{(-p)}(t)\,dt$

On peut donc prendre $\underline{q_p = \frac{\gamma^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(p-1)!}}$

12.c) En faisant $x=\gamma^{-p+1}$ on obtient $f(\gamma^{-p+1}) = q_p\int_{\gamma^{-p}}^{\gamma^{-p+1}}(\gamma^{-p+1}-t)f_{(0)}(\gamma^p t)\,dt$

Or q_p est non nul, $f(\gamma^{-p+1})=0$ car $p>0$. En faisant le changement de variable $t=\gamma^{-p}u$ on obtient

$$\underline{\forall p>0 \quad \int_1^{\gamma}(\gamma-t)^{p-1}f_0(t)\,dt=0}$$

12d) $((\gamma-t)^{p-1})_{p>0}$ est une base de $\mathbb{R}[t]$. Pour toute fonction polynomiale P on aura donc $\int_1^{\gamma}P(t)f_0(t)\,dt=0$

Or $\underline{f_0 \text{ est continue sur } [1,\gamma]}$ donc $\underline{\text{limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales } (P_n)}$. Puisque f_0 est bornée sur $[1,\gamma]$, $P_n f_0$ converge uniformément vers $f^2_{(0)}$ sur $[1,\gamma]$. On peut passer à la limite dans l'intégrale

Donc $\underline{\int_1^{\gamma}f^2_{(0)}(t)\,dt=0}$. $f^2_{(0)}$ est continue et positive sur $[1,\gamma]$ Donc $\underline{f_{(0)}=0}$, et d'après 10. $\underline{f=0}$