

Corrigé de la première épreuve de mathématiques

Mines-Ponts 2009 - filière MP

A. Questions préliminaires

1) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété \mathcal{P}_n :

$$\phi_f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \phi_f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} i^n e^{itx} x^n f(x) dx.$$

Nous avons :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{itx} f(x)$ est continue par morceaux (et même continue) sur \mathbb{R} ,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{itx} f(x)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $|e^{itx} f(x)| \leq f(x)$ et f est sommable sur \mathbb{R} ,

donc \mathcal{P}_0 est vérifiée.

Soit $n \geq 0$ et supposons que \mathcal{P}_n est vérifiée. Notons $g : (x, t) \mapsto i^{n+1} e^{itx} x^{n+1} f(x)$. Appliquons le théorème de Leibniz :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux et sommable sur \mathbb{R} ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} ;
- pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq |x|^{n+1} f(x)$ et $x \mapsto |x|^{n+1} f(x)$ est sommable sur \mathbb{R} ;

donc $\phi_f^{(n)}$ est de classe C^1 , i.e. ϕ_f est de classe C^{n+1} , avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_f^{(n+1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} i^{n+1} e^{itx} x^{n+1} f(x) dx$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vérifiée.

2) L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi : x \mapsto e^{ix}$ à l'ordre $n - 1$ donne :

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \left| \varphi(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} x^m \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in [0, x]} |\varphi^{(n)}(t)| = \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in [0, x]} |i^n e^{it}| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Remarque : attention de ne pas appliquer l'égalité des accroissements finis (la fonction φ est à valeurs complexes).

3) L'application $h_{a,b}$ est clairement continue sur \mathbb{R}^* et l'inégalité précédente (avec $n = 2$) donne :

$$\begin{cases} e^{ita} = 1 + ita + O(t^2) \\ e^{itb} = 1 + itb + O(t^2) \end{cases}$$

d'où $h_{a,b}(t) = (b - a) + O(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} b - a = h_{a,b}(0)$ et $h_{a,b}$ est également continue en 0.

- 4) Si $t = 0$, l'inégalité est évidente. Sinon, l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ entre $-at$ et $-bt$ donne :

$$|it h_{a,b}(t)| = |\varphi(-at) - \varphi(-bt)| \leq |bt - at| \sup_{s \in [-bt, -at]} |\varphi'(s)| = (b-a)|t|$$

d'où l'inégalité demandée.

- 5) Pour $k \in \mathbb{N}$, nous avons $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!} \geq \frac{k^k}{k!}$ (la série est à termes positifs).

B. La fonction ϕ_f caractérise f

- 6) Pour θ non nul, le changement de variable $x = \theta t$ donne :

$$R(\theta, T) = \int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{\sin x}{x} dx = 2S(\theta T)$$

et cette relation est encore valable quand $\theta = 0$.

- 7) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la relation précédente donne directement :

$$R(\theta, T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \begin{cases} \pi & \text{si } \theta > 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ -\pi & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

La quantité $R(x, T) - R(y, T)$ a donc toujours une limite quand T tend vers l'infini, dont la valeur est explicitée dans le tableau :

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$y < 0$	0	π	2π
$y = 0$	$-\pi$	0	π
$y > 0$	-2π	$-\pi$	0

- 8) Posons $\theta : (t, x) \mapsto \frac{1}{2\pi} h_{a,b}(t) e^{itx} f(x)$. Pour $T > 0$, nous avons :

- θ est continue sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$;
- θ est intégrable sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$, car $|\theta(t, x)| \leq \frac{1}{2\pi} |h_{a,b}(t)| |f(x)|$ avec $h_{a,b}$ intégrable (car continue) sur $[-T, T]$ et f intégrable sur \mathbb{R} ;
- pour tout $t \in [-T, T]$, $x \mapsto \theta(t, x)$ est intégrable sur \mathbb{R} et $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \theta(t, x) dx = \frac{1}{2\pi} h_{a,b}(t) \phi_f(t)$ est continue (et intégrable) sur $[-T, T]$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta(t, x)$ est intégrable (car continue) sur $[-T, T]$ et

$$\varphi_T(x) = \int_{-T}^T \theta(t, x) dt = \frac{f(x)}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = \frac{f(x)}{2\pi} (R(x-a, T) - R(x-b, T))$$

en remarquant que les parties impaires ont des intégrales nulles sur $[-T, T]$. Comme S est continue, R l'est également, ainsi que φ_T ; enfin, la fonction S ayant des limites à l'infini, elle est bornée :

$$|\varphi_T(x)| = \frac{f(x)}{\pi} |S((x-a)T) - S((x-b)T)| \leq \frac{2\|S\|_\infty}{\pi} f(x)$$

et φ_T est intégrable sur \mathbb{R} ;

donc le théorème de Fubini s'applique :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \phi_f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(x) dx$$

Il reste alors à appliquer le théorème de convergence dominée :

- φ_T converge simplement sur \mathbb{R} quand T tend vers $+\infty$ vers l'application continue par morceaux :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{2} f(a) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \frac{1}{2} f(b) & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } b < x \end{cases}$$

- les fonction φ_T sont dominées par une fonction continue et sommable sur \mathbb{R} :

$$\forall T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi_T(x)| = \frac{2\|S\|_\infty}{\pi} f(x)$$

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \phi_f(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

- 9) Si deux fonctions f et g de E ont même transformée, le résultat précédent donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = \int_0^x g(t) dt$$

Comme f et g sont continues sur \mathbb{R} , on peut dériver cette égalité par rapport à x : f et g sont égales.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

- 10) La fonction f_0 est clairement continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(car $-u^2/2 - u$ tend vers $-\infty$ quand u tend vers $-\infty$). Comme $f_0 = 0$ sur $]-\infty, 0]$, f_0 est continue sur \mathbb{R} .

f_0 est à valeurs dans \mathbb{R}^+ et pour $A > 0$, le changement de variable $u = \ln x$ donne :

$$\int_{-A}^A f_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

donc f_0 est élément de E .

11) Le même changement de variable donne, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-A}^A x^k f_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left(ku - \frac{u^2}{2}\right) du \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{k^2}{2}\right)$$

donc f_0 admet des moments de tous ordres ($x \mapsto x^k f_0(x)$ est positive sur \mathbb{R}) et $a_k(f_0) = \exp\left(\frac{k^2}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

12) f_a est clairement continue et positive (car $-1 \leq a \leq 1$) sur \mathbb{R} . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la même méthode que précédemment donne :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A x^k (f_a - f_0)(x) dx &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left((k + 2i\pi)u - \frac{u^2}{2}\right) du \right) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \left(\exp\left(\frac{(k + 2i\pi)^2}{2}\right) \right) = \exp\left(\frac{k^2 - 2\pi^2}{2}\right) \sin(2k\pi) = 0 \end{aligned}$$

donc f_a a des moments de tous ordres ($x \mapsto x^k f_a(x)$ est également positive sur \mathbb{R}), avec $a_k(f_a) = a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $a_0(f_a) = a_0(f_0) = 1$ et $f_a \in E$.

Une application $f \in E$ qui admet des moments de tous ordres n'est donc pas toujours caractérisée par la suite de ses moments.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$(b_{2k+1}(f))^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^k \sqrt{f(x)} \times |x|^{k+1} \sqrt{f(x)} dx \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^{2k} f(x) dx \times \int_{\mathbb{R}} x^{2k+2} f(x) dx = a_{2k}(f) a_{2k+2}(f)$$

14) Si $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b_k(f)^{1/k}}{k} = \frac{a_{2p}(f)^{1/(2p)}}{2p} \leq M \leq 2M$.

Si $k = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, nous avons cette fois :

$$b_k(f) = b_{2p+1}(f) \leq \sqrt{a_{2p}(f)} \sqrt{a_{2p+2}(f)} \leq (2pM)^p ((2p+2)M)^{p+1} = p^p (p+1)^{p+1} (2M)^{2p+1}$$

La concavité de la fonction logarithme donne :

$$\frac{p}{2p+1} \ln(p) + \frac{p+1}{2p+1} \ln(p+1) \leq \ln\left(\frac{p}{2p+1} p + \frac{p+1}{2p+1} (p+1)\right) = \ln\frac{p^2 + (p+1)^2}{2p+1} \leq \ln(2p+1)$$

en remarquant que $p^2 + (p+1)^2 = 2p^2 + 2p + 1 \leq 4p^2 + 4p + 1 = (2p+1)^2$. En composant par la fonction (croissante) exponentielle, nous obtenons :

$$p^p (p+1)^{p+1} \leq (2p+1)^{2p+1} = k^k$$

et donc $b_k(f) \leq k^k (2M)^k$, soit $\frac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leq 2M$.

15) L'inégalité de Taylor-Lagrange donne une nouvelle fois, pour $x, h \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$:

$$\left| \phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \sup_{t \in [x, x+h]} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itu} i^n u^n f(u) du \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |u|^n |f(u)| du = \frac{|h|^n}{n!} b_n(f)$$

16) Notons $\alpha_n = \frac{b_n(f)}{n!}$. Les égalités démontrées aux questions 14) et 5) donnent :

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{n^n}{n!} (2M)^n \leq (2eM)^n$$

Soit alors $x, h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < \frac{1}{2eM} = A$. Nous avons :

$$|\alpha_n h^n| \leq \left(\frac{h}{2eM} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

L'inégalité 15) prouve alors que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(x)$ converge et a pour somme $\phi_f(x)$, ce qui donne :

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, |h| < A \implies \phi_f(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(x)$$

17) Comme la suite $a_k(g)$ vérifie la propriété (U), avec le même M , nous avons également :

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, |h| < A \implies \phi_g(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}(x)$$

Avec $x = 0$, nous obtenons :

$$\forall h \in]-A, A[, \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} i^n a_n(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} i^n a_n(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}(0) = \phi_g(h)$$

donc ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $[-A/2, A/2]$.

Soit ℓ un entier > 0 et supposons que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}\right]$. Les dérivées successives de ϕ_f et ϕ_g coïncident donc également sur $\left[-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}\right]$. En choisissant successivement $x = \frac{\ell A}{2}$ et $x = -\frac{\ell A}{2}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \forall h \in [0, A/2], \phi_f\left(\frac{\ell A}{2} + h\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(\frac{\ell A}{2} + h\right) \\ \forall h \in [-A/2, 0], \phi_f\left(-\frac{\ell A}{2} + h\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(-\frac{\ell A}{2} + h\right) \end{cases}$$

ce qui prouve que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\frac{(\ell+1)A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2}\right]$ et achève la preuve par récurrence.

18) Supposons que deux éléments f et g de E ont des moments de tous ordres égaux, et que leurs moments vérifient en outre la condition (U). La question 17) prouve que $\phi_f = \phi_g$, soit $f = g$ d'après la question 9). Nous avons donc montré qu'une fonction qui admet des moments de tous ordres vérifiant la condition (U) est entièrement caractérisée par la suite de ses moments.

E. Application

19) **Analyse** : supposons que f est une solution du système. Nous avons alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1}(f) = 0 \text{ et } a_{2k}(f) = (2k-1) \times (2k-3) \times \dots \times 3 \times 1 \times a_0(f) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

On a ensuite :

$$\forall k \geq 1, 0 \leq a_{2k}(f) = \frac{(2k)(2k-1) \dots (k+1)}{2^k} \leq \frac{(2k)^k}{2^k} = k^k$$

d'où

$$\forall k \geq 1, 0 \leq \frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$$

La suite $a_k(f)$ vérifie la condition **(U)** et la question 16) s'applique (avec $x = 0$) :

$$\forall h, |h| < \frac{1}{e} \implies \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} i^n a_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!} i^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{h^2}{2}\right)^k = \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$$

Les fonctions ϕ_f et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ sont développables en séries entières en tout point de \mathbb{R} et coïncident sur un voisinage de 0, elles sont donc égales sur \mathbb{R} .

Considérons d'autre part la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ixu) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \exp\left(\frac{(ix)^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \phi_f(x)$$

donc $f = g$ d'après la question 9). La seule solution possible au problème posé est donc la fonction g .

Synthèse : la fonction g est clairement élément de E et admet des moments de tous ordres. Comme g est paire, ses moments d'ordres impairs sont nuls et une intégration par partie donne pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2k}(g) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1} (-x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2k-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= (2k-1) a_{2k-2}(g) \end{aligned}$$

donc g est bien solution du système.

Conclusion : le système possède donc pour unique solution la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.