X-ENS PSI 2018

Partie I.

1) Les fonctions c et f sont continues sur $[0,1]$.
L'équation $-y'' + cy = f$ est une équation linéaire scalaire du second ordre sous forme (presque) normalisée. (multiplier par -1).
On peut donc appliquer le théorème de Cauchy et le problème (1.bis) admet une unique solution.

2) Soit $w_2 = v_\lambda - \lambda w_1$ alors

$$-w_2'' + c\, w_2 = -v_\lambda'' + c\, v_\lambda + \lambda w_1'' - \lambda c w_1 = f.$$

$w_2(0) = 0$

$w_2'(0) = \lambda - \lambda = 0$

$$\begin{cases} -w_2'' + c\, w_2 = f \\ w_2(0) = 0 \\ w_2'(0) = 0 \end{cases}$$

w_2 est uniquement déterminée et indépendante de λ.

3) Première version (je rappelle que vous devez n'en rédiger qu'une)
On suppose $w_1(1) = 0$

$w_1'(0) = 1$, donc $\exists \varepsilon$ $\forall x \in]0,\varepsilon[$ $w_1(x) - w_1(0) > \frac{1}{2}x$.

$\forall x \in]0,\varepsilon[$ $w_1(x) > 0$

Soit $x_0 = \min \underbrace{\{x, \in]0,1] \ w_1(x) = 0\}}_{\neq \emptyset \text{ car contient } 1 \text{ et est fermé car } w_1 \text{ continue.}}$

Alors $\forall x \in]0, x_0[$ $w_1(x) > 0$. Or $c(x) \geq 0$ donc $\forall x \in [0,1]$ $w_1''(x) \geq 0$ donc w_1' est croissante. Or $w_1'(0) = 1$ et $w_1'(x_1) \leq 0$ (car $\forall x < x_1$ $w_1(x) \geq 0$ et $w_1(x_1) = 0$)
c'est contradictoire.

Deuxième version.

$$w_1'' = c\, w_1$$

donc $2(w_1'' w + w_1'^2) = 2(c\, w_1 + w_1^2) \geq 0$

donc $(w_1^2)'' \geq 0$

donc w_1^2 est convexe.

si $w_1(0) = 0 = w_1(1)$ alors

$w_1^2(0) = 0 = w_1^2(1)$

Donc $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq w_1^2(x) \leq (1-x)\, w_1^2(0) + x\, w_1^2(1) = 0$

donc $\forall x \in [0,1]$ $w_1(x) = 0$ puis $w_1'(0) = 0$ contradictoire

4) . $v_\lambda(1) = w_1(1)\lambda + w_2(1)$.

Il existe donc au moins un λ $\left(\lambda = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}\right)$ tel que $v_\lambda(1) = 0$.

~~En fait un tel λ est unique. et il vaut $v_\lambda'(0) - w_2'(0)$~~
~~et est donc la donnée de λ détermine v~~

Soit w une solution du problème (1) c'est l'unique solution de (1-bis) avec $\lambda = w'(0)$.

Or il existe au plus un λ tel que la solution de (1.bis) soit solution de 1. Donc w est unique

~~5) Supposons qu'il existe $x_1 \in]0,1[$, $u(x_1) < 0$, alors il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $u(x_0) = \min_{x \in [0,1]} u(x) < 0$~~

~~Or a $u'(x_0) = 0$ si $\forall x \in]x_0, x_1[$ $u''(x) \leq 0$ alors u est décroissante sur $[x_0, 1]$ ce qui contredit $u(1) = 1$~~

~~Donc $\exists x_2 \in]x_0, x_1[$ $u''(x_2) > 0$ et $u(x_2) \leq 0$~~

~~On a alors $-u''(x_2) + c(x_2)u(x_2) < 0$ et $f(x_2) \geq 0$~~

~~C'est une contradiction.~~

~~PS (en toute rigueur remplacer 1 par $\min\{x > x_0,\ u(x) \geq 0\}$.~~

voir 2 à la fin pour une réponse plus claire

5) Démonstration plus claire (je l'espère)

2 bis

On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe x_0 tel que $u(x_0) < 0$

Soit $x_1 = \sup \{x < x_0,\ u(x_0) \geq 0\} = \sup E^-$

et $x_2 = \inf \{x > x_0,\ u(x) \geq 0\} = \inf E^+$

x_1 et x_2 existe car les ensembles E^- ~~dat~~ E^+ sont non vides ($0 \in E^-$, $1 \in E^+$), et de plus fermés car u est continue et $\mathbb{R}^+$ fermé.

Donc $u(x_1) = 0$ $u(x_2) = 0$ et $\forall x \in]x_1, x_2[$ $u(x) < 0$

Or $\forall x \in]x_1, x_2[$ $u''(x) = -f(x) + c(x)u(x) \leq 0$

Donc u' est décroissante sur $[x_1, x_2]$.

Or $\forall x > x_1$ $u(x) < u(x_1)$ donc $\frac{u(x) - u(x_1)}{x - x_1} < 0$

et par conséquent $u'(x_1) \leq 0$.

de même $u'(x_2) \geq 0$.

~~et~~

Donc $\forall x \in [x_1, x_2]$ $u'(x) = 0$, donc ~~de~~ ~~et~~

u est constante sur $[x_1, x_2]$, soit $\forall x \in [x_1, x_2]$ $u(x) = 0$

Ce qui contredit $u(x_0) < 0$.

Partie II

6) A est symétrique réelle, donc ses valeurs propres sont réelles

- V est vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $V \neq 0$ et $AV = \lambda V$.

$$AV = \lambda V \iff \begin{cases} -2v_1 + v_2 = \lambda v_1 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = \lambda v_2 \\ v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = \lambda v_i \\ v_{n-1} - 2v_n = \lambda v_n \end{cases} \iff \begin{cases} v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0 \\ 1 \leq i \leq n \\ \text{en posant } v_0 = v_{n+1} = 0 \end{cases}$$

7) Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé, on a $\forall i \in [1,n] \quad (2-\lambda) v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$ (*)

Soit $i_0 = \min\{ i, 1 \leq i \leq n, |v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j| > 0 \}$

un tel i_0 existe.

Si $i_0 \geq 2$ $\quad |v_{i_0-1}| < |v_{i_0}|$ et $|v_{i_0+1}| \leq |v_{i_0}|$ (vrai si $i_0 = n$ car $v_{n+1} = 0$)

Si $i_0 = 1$ $\quad |v_{i_0-1}| = 0 < |v_{i_0}|$ et $|v_{i_0+1}| \leq |v_{i_0}|$.

De plus $|v_{i_0}| > 0$.

Ecrivons (*) pour i_0

$$|2-\lambda| = \frac{1}{|v_{i_0}|}\left(|v_{i_0-1} + v_{i_0+1}|\right) \leq \underbrace{\frac{|v_{i_0-1}|}{|v_{i_0}|}}_{<1} + \underbrace{\frac{|v_{i_0+1}|}{|v_{i_0}|}}_{\leq 1}$$

$$|2-\lambda| < 2$$

et $\boxed{\lambda \in]0,4[}$.

8.a) le discriminant de P est $(2-\lambda)^2 - 4 < 0$ donc P possède deux racines distinctes et conjuguées.

8.b) On sait qu'il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ $\forall k \in [0, n+1]$ $v_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$.

$\rho = 1$ car $r_1 r_2 = \rho^2 = 1$

$v_0 = c_1 + c_2 = 0$ donc $v_k = c_1 (r_1^k - r_2^k) = 2 i c_1 \sin(k\theta)$.

$v_1 = 2 i c_1 \sin\theta$ donc $\forall k \in [0, n+1]$ $v_k = v_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$\sin\theta \neq 0$ car $\Delta = -4\sin^2\theta < 0$, et $v_1 \neq 0$ car $V \neq 0$, donc $v_{n+1} = 0$ donc $\boxed{\sin((n+1)\theta) = 0}$

9) Prenons $\theta_j = \frac{j\pi}{(n+1)}$, $v_1 = 1$, $v_0 = 0$ et

$v_k = \frac{\sin k\theta_j}{\sin \theta_j}$ pour $2 \leq k \leq n$.

Alors la relation de la question 6 est vérifiée.

et $V = {}^t(v_1, \quad , v_n)$ est un vecteur propre associé à la valeur λ_j tel que. $x^2 - (2-\lambda)x + 1 = (x - e^{i\theta_j})(x - e^{-i\theta_j})$

Donc $2 - \lambda = 2\cos\theta_j$ et $\boxed{\lambda = 2(1 - \cos\theta_j)}$

Or les θ_j sont distincts et dans $]0, \pi[$ et cos est injective sur $]0, \pi[$.

On a donc trouvé n valeurs propres distinctes de A.

les λ_j sont donc exactement les valeurs propres de A

et les vecteurs propres associés sont les $\boxed{V_j = {}^t\left(\frac{\sin(i\theta_j)}{\sin\theta_j}\right)_{1 \leq i \leq n}}$

$(V_1, \quad , V_n)$ est une base de vecteurs propres.

Remarque. on aurai pu prendre $V_j = (\sin\theta_j, \sin(2\theta_j), \dots, \sin(n\theta_j))$ qui semble plus simple. Il n'en est rien, En fait

$\frac{\sin(i\theta_j)}{\sin(\theta_j)} = P_i(\cos\theta_j) = P_i(2-\lambda) = Q_i(\lambda)$ s'exprime simplement en fonction de λ. (les P_i sont les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce)

10 a) Montrons B est inversible, la technique est la même qu'en 7. On passe par la contraposée.

Supposons B non inversible. Il existe $V \neq 0$ tel que $BV = 0$

Soit i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max\{|v_i|\} (>0)$. quitte à changer V en $-V$ on peut supposer $v_{i_0} > 0$.

$$b_{i_0,i_0} v_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_j \leq \left| \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |b_{i_0,j}| |v_j|$$

$$b_{i_0,i_0} v_{i_0} \leq v_{i_0} \times \left(-\sum_{j \neq i_0} b_{i,j}\right)$$

Puisque $v_{i_0} > 0$ on en déduit

$$b_{i_0,i_0} \leq -\sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j}$$

c'est-à-dire $\exists\, i_0 \quad \sum_{j=1}^{n} b_{i_0,j} \leq 0$

10 b) Notons $V = B^{-1} F$, alors $BV = F$.

le principe est le même qu'en 7 et 10 a). Soit i_0 tel que $v_{i_0} = \min v_i$, alors

$$f_{i_0} = b_{i_0,i_0} v_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_j$$

$$\leq b_{i_0,i_0} v_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_{i_0} \quad (\text{car } v_j \geqslant v_{i_0} \text{ et } b_{i_0,j} \leq 0)$$

$$0 \leq f_{i_0} \leq \underbrace{\left(b_{i_0,i_0} + \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j}\right)}_{>0} v_{i_0}$$

donc $v_{i_0} \geqslant 0$ et $\forall i \quad v_i \geqslant 0$.

10 c) En appliquant ce résultat, au vecteur F parcourant la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ $B^{-1} e_j = {}^t((B^{-1})_{1,j}, \ldots, (B^{-1})_{n,j})$

Donc $\forall i,j \quad (B^{-1})_{i,j} \geqslant 0$.

11). Prenons $B_\varepsilon = A_n + \varepsilon I_n$.

$\forall i \quad b^\varepsilon_{i,i} = 2+\varepsilon > 0$

$\forall i,j \ i\neq j \ b^\varepsilon_{i,j} \in \{-1,0\}$ donc $\underline{\forall i,j \ i\neq j \ b^\varepsilon_{i,j} \leq 0}$

$\sum_{j=1}^{n} b^\varepsilon_{1,j} = 1+\varepsilon > 0 \cdot \sum_{j=1}^{n} b^\varepsilon_{n,j} = 1+\varepsilon > 0$

$\forall i \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad \sum_{j=1}^{n} b^\varepsilon_{i,j} = \varepsilon > 0$

B_ε est donc une M-matrice

donc $\forall \varepsilon \quad B_\varepsilon^{-1} \in M_n(\mathbb{R}^+)$.

Or 0 n'est pas valeur propre de A_n $\left(\sin \frac{j\pi}{n+1} \in]0,1]\right)$ donc

A_n est inversible

et l'application. $M \to M^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ dans lui-même est continue (chaque coefficient de M^{-1} est une fraction rationnelle des coefficients de M).

Donc $\quad A_n^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon^{-1}$

De plus $\mathbb{R}^+$ est fermé et les coefficients de $\lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon^{-1}$ sont les limites des coefficients respectifs de B_ε^{-1}.

Donc $\quad A_n^{-1} \in M_n(\mathbb{R}^+)$

ie. Si $A_n^{-1} = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j \leq n}$ alors $\forall i,j \ \alpha_{i,j} \geq 0$.

Partie III

12) On écrit la formule de Taylor avec reste intégrale en x_i

$$(1)\quad v(x_i+h) = v(x_i) + h\,v'(x_i) + \frac{h^2}{2} v''(x_i) + \frac{h^3}{6} v'''(x_i) + \underbrace{\int_0^h \frac{(h-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\,dt}_{R_h}$$

$$|R_h| \leq \int_0^h \frac{(h-t)^3}{6} \|v^{(4)}\|_\infty\, dt = \frac{h^4}{24} \|v^{(4)}\|_\infty$$

De la même manière.

$$(2)\quad v(x_i-h) = v(x_i) - h\,v'(x_i) + \frac{h^2}{2} v''(x_i) - \frac{h^3}{6} v'''(x_i) + R_{-h}$$

avec $|R_{-h}| \leq \frac{h^4}{24} \|v^{(4)}\|_\infty$

En additionnant (1) et (2)

$$v(x_i+h) + v(x_i-h) = 2v(x_i) + h^2 v''(x_i) + R_h + R_{-h}$$

$$\left| v''(x_i) - \frac{1}{h^2}\left(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i)\right)\right| = \frac{|-R_h - R_{-h}|}{h^2}$$

$$\boxed{\left| v''(x_i) - \frac{1}{h^2}\left(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i)\right)\right| \leq h^2 \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{24}}$$

13) Le système (2) possède une solution unique ssi le système.

$$\left(A_n + h^2\begin{pmatrix} c(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c(x_n)\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+h^2c(x_1) & -1 & & \\ -1 & 2+h^2c(x_2) & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2c(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n)\end{pmatrix}$$

possède une solution unique.

Posons $B_n = A_n + h^2 \begin{pmatrix} c(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c(x_n) \end{pmatrix}$

Montrons que cette matrice est inversible.

On raisonne comme en 7 et 10 b).

Supposons qu'il existe X non nul avec $BX = 0$

On a $x_1 = \dfrac{1}{2 + h^2 c(x_1)} x_2$ donc $|x_1| \leq \frac{1}{2} |x_2| \leq \frac{1}{2} \|X\|_\infty < \|X\|_\infty$

Soit $i_0 = \min \{ i, |x_i| = \|X\|_\infty \}$ $i \geq 2$ (et $i \leq n-1$)

$$|x_{i_0}| = \frac{1}{2 + h^2 c(x_{i_0})} |x_{i_0-1} + x_{i_0+1}| < \|X\|_\infty .$$

contradiction

14) Avec ces hypothèses le problème (1) s'écrit

$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} u(x) = -\dfrac{x^2}{2} + ax + b \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$,

soit $u(x) = \dfrac{x - x^2}{2}$. On a bien $\forall i \quad u(x_i) = \dfrac{x_i(1-x_i)}{2}$.

15) Si $U = {}^t(u_1, \ldots, u_n)$ et $F = {}^t(h^2 f(x_1), \ldots, h^2 f(x_n))$

alors $U = B_n^{-1} F$.

En remplaçant B_n par $B_n + \varepsilon I_n$ comme en 11

on montre que les coefficients de B_n^{-1} sont positifs

les coefficients de U sont donc positifs (et $u_0 \geq 0, u_{n+1} \geq 0$)

Partie IV

16) $\forall \cancel{X}$ $\|x\|_\infty \leq 1$ $\quad \|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{i,j} x_j\right|$

$$\leq \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}||x_j|\right)$$

$$\leq \max_i \left(\left(\sum_j |a_{i,j}|\right) \|x\|_\infty\right)$$

$$\|Ax\|_\infty \leq \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\right)$$

N(A) est donc défini et $N(A) \leq \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\right)$

Soit i_0 tel que $\sum_j |a_{i_0,j}| = \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\right) = N'(A)$

alors $\|Ax\|_\infty = N'(A)$ si on choisit x de telle sorte que $x_j = \text{signe}(a_{i_0,j})$ $\quad 1 \leq j \leq n$.

Donc, en conclusion $N(A) = N'(A) = \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\right)$

On vérifie alors facilement que N est une norme, c'est-à-dire

- $N(A) \in \mathbb{R}^+$.
- $N(A) = 0 \iff A = 0$
- $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$
- $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

17a) Soit $\tilde{A}_n = \left((n+1)^2 A_n\right)^{-1} = (\tilde{a}_{i,j})$

D'après la question 11 les $\tilde{a}_{i,j}$ sont positifs.

Soit $\mathbb{1}$ le vecteur colonne formé de 1., alors.

$\tilde{A}_n \mathbb{1} = \left(\sum_j \tilde{a}_{i,j}\right) = \left(\sum_j |\tilde{a}_{i,j}|\right)$ donc $N(\tilde{A}_n) = \|\tilde{A}_n \mathbb{1}\|_\infty$

Or si U est la solution de $\tilde{A}_n U = \mathbb{1}$ on aura $U = \tilde{A}_n \mathbb{1}$.

Or d'après 14) $\forall i$ $u_i = \frac{1}{2} x_i (1 - x_i)$ $\quad u_i \in [0, \frac{1}{8}]$ et $\|U\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

Finalement $N\left(\left((n+1)^2 A_n\right)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$

17 b) Comme dans le cas $N\left(\left((n+1)^2 A_n + D_n\right)^{-1}\right) = \|V\|_\infty$

où V vérifie $\left((n+1)^2 A_n + D_n\right) V = \mathbb{1}$.

Or a prouvé en 13) que $\left((n+1)^2 A_n + D_n\right)^{-1}$ est à coefficients positifs (et surtout qu'elle est inversible)

Donc les coefficients de V sont positifs

$$(n+1)^2 A_n V = \mathbb{1} - D_n V$$

$$\underbrace{V}_{\text{à coefficient positifs}} = \underbrace{\tilde{A}_n}_{\text{à coefficient positifs}} \mathbb{1} - \underbrace{\tilde{A}_n D_n V}_{\text{à coefficients positifs}}$$

Donc $\|V\|_\infty \leq \|\tilde{A}_n \mathbb{1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

et $N\left(\left((n+1)^2 A_n + D_n\right)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$

18) $A_n X = \left(-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})\right) - \left(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}\right)$

$= -h^2 u''(x_i) + \alpha_i - h^2\left(f(x_i) - c(x_i) u_i\right)$ avec $|\alpha_i| \leq C h^4$

$= h^2\left(f(x_i) - c(x_i) u(x_i)\right) + \alpha_i - h^2\left(f(x_i) - c(x_i) u_i\right)$

$A_n X = h^2 c(x_i)\left(u_i - u(x_i)\right) + \alpha_i$

Soit $\left((n+1)^2 A_n + D_n\right) X = \frac{1}{h^2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = Y$

$\|Y\|_\infty \leq C h^2$ et $\|X\|_\infty \leq N\left((n+1)^2 A_n + D_n\right) \|Y\|_\infty$

c'est à dire $\boxed{\|X\|_\infty \leq \frac{C}{8} h^2 = \frac{C}{8} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{C}{8n^2} = \frac{\tilde{C}}{n^2}.}$

PS. $D_n = \begin{pmatrix} c(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c(x_n) \end{pmatrix}$ est bien à coefficients diagonaux positifs

Partie V

19a) $E(X_1) = x$ $\quad Var(X_1) = x(1-x)$ et les X_i sont indépendantes. Donc

$$E(S_n) = \frac{E(X_1) + \quad + E(X_n)}{n} = x \quad \text{(linéarité de } E\text{)}$$

$$Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + \quad + V(X_n)\right) = \frac{x(1-x)}{n} \quad \text{(les } X_i \text{ sont indépendantes)}$$

$$E(f(S_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\left(= \sum_{r \in S_n(\Omega)} f(r)\, \mathbb{P}(S_n = r) \right) \quad \text{Formule de transfert.}$$

$E(f(S_n)) = B_n f$

19b) Le membre de gauche est $E(|S_n - E(S_n)|)$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$E(|S_n - E(S_n)|) \leq \sqrt{\cancel{Var}\left((S_n - E(S_n))^2\right)} \sqrt{E(1)}.$$

$$E(|S_n - E(S_n)|) \leq \sqrt{Var(S_n)} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

20) $\alpha \in]0,1]$ Soit $\varphi : t \mapsto t^\alpha$. $\varphi''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc φ est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$. Son graphe est en dessous de sa tangente en 1.

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*+} \quad t^\alpha \leq 1 + \alpha(t-1) = (1-\alpha) + \alpha t \leq 1 + t.$$

En appliquant cette inégalité à $t = \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|$

on obtient immédiatement

$$\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha \leq n^{-\frac{\alpha}{2}}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)$$

$$f(x) - B_n f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\text{car } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$f(x) - B_n f(x) = E\left(f(x) - f\left(S_n\right)\right)$$

$$\left| f(x) - B_n f(x)\right| = \left| E\left(f(x) - f(S_n)\right)\right| \leq E\left(\left| f(x) - f(S_n)\right| \right)$$

$$\leq K\, E\left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right|^{\alpha} \right)$$

$$\leq \frac{K}{n^{\alpha/2}} \left(E\left(1 + \sqrt{n}\, \left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right)\right)$$

$$\leq \frac{K}{n^{\alpha/2}} \left(1 + \sqrt{n}\, E\left(\left| E(S_n) - S_n \right| \right)\right)$$

$$\left| f(x) - B_n f(x)\right| \leq \frac{3K}{2 n^{\alpha/2}} \qquad \text{(d'après 19.b)}$$

En passant à la borne supérieur

$$\boxed{\left\| f - B_n f \right\|_\infty \leq \frac{3K}{2 n^{\alpha/2}}}$$

En particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| B_n f - f \right\|_\infty = 0$. Nous avons démontré un théorème de Weierstrass effectif (mais avec des hypothèses plus fortes que la continuité sur f)

22) $$(\hat{B}_{n+1} u)'(X) = \sum_{k=1}^{n+1} u_k \binom{n+1}{k} k X^{k-1} (1-X)^{n+1-k}$$
$$- \sum_{k=0}^{n} u_k \binom{n+1}{k} (n+1-k) X^k (1-X)^{n-k}$$

Or $\underline{k \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1}}$ et $\underline{(n+1-k)\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k}}$

Avec un décalage d'indice dans la première somme on obtient

$$(\hat{B}_{n+1} u)'(X) = (n+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - v_k) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

$$(\hat{B}_{n+1} u)'(X) = (\hat{B}_n \tilde{u})(X) \times (n+1)$$

où $\tilde{v}_k = u_{k+1} - u_k$.

On en déduit $(\hat{B}_{n+1} u)''(X) = (n+1) n \ \hat{B}_{n-1} \tilde{\tilde{u}} \ (X)$

avec $\tilde{\tilde{u}}_k = \tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = -f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) \times \frac{1}{(n+1)^2}$

On obtient bien

$$\boxed{(\hat{B}_{n+1} u)''(X) = -\frac{n}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}.}$$

23 a) $(\hat{B}^{u}_{n+1})''(x) - u''(x) = X''_{n+1}(x)$

$$X''_{n+1}(x) = \left[-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-\ell} + B_{n-1} f(x) \right] + \left[f(x) - B_{n-1} f(x) \right]$$
$$+ \left[\frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell} \right]$$

Majorons indépendamment les trois termes qui composent cette somme (en valeur absolue, bien sûr).

$$\boxed{|f(x) - B_{n-1}f(x)| \leq \|f - B_n f\|_\infty} \quad A$$

B) $$\boxed{\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)\binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}\right|} \leq \frac{1}{n+1} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \|f\|_\infty \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}}_{= \|f\|_\infty}$$

Reste le premier terme.

$$\left(-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)\binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1}\right) + B_{n-1} f(x) \quad \text{vaut}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(-f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) + f\left(\frac{\ell}{n-1}\right)\right)\binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell} = \theta(x)}$$

$$|\theta(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{\ell}{n-1}\right) - f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)\right| \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}$$

Or $\left|\frac{\ell}{n-1} - \frac{\ell+1}{n+1}\right| = \left|\frac{n-1-2\ell}{(n+1)(n-1)}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ car $|n-1-2\ell| \leq n-1$.

Donc $\left|f\left(\frac{\ell}{n-1}\right) - f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^\alpha \times K$.

et $$\boxed{|\theta(x)| \leq \frac{K}{(n+1)^\alpha} \times 1 = \frac{K}{(n+1)^\alpha}.} \quad C$$

En regroupant A, B et C on obtient le résultat demandé.

3b) Si $x = 0$ ou $x = 1$ le résultat est vrai avec par exemple $\xi = \frac{1}{2}$.

Supposons $x \in]0,1[$. On peut alors choisir un α_x tel que $\chi_{n+1}(x) + \alpha_x x(1-x) = 0$, $\alpha_x = -\frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}$.

Considérons alors la fonction

$$h : t \mapsto \chi_{n+1}(t) + \alpha_x \, t(1-t)$$

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles, et s'annule en trois points distincts $0 < x < 1$.

D'après le théorème de Rolle, il existe c_1 et c_2 avec $0 < c_1 < x < c_2 < 1$ tels que $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$, car $h(0) = h(x)$ $(=0)$ et $h(x) = h(1)$ $(=0)$.

Une nouvelle application du théorème de Rolle donne l'existence d'un ξ tel que $h''(\xi) = 0$.

Or $h''(t) = \chi''_{n+1}(t) - 2\alpha_x$.

Il existe donc bien un ξ tel que $\alpha_x = \frac{1}{2} \chi''_{n+1}(\xi)$,

c'est-à-dire $\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2} x(1-x) \chi''_{n+1}(x)$.

24) On en déduit $\| \chi_{n+1} \|_\infty \leq \frac{1}{8} \| \chi''_{n+1} \|_\infty$

Or $\| \chi_{n+1} \|_\infty = \| u - \hat{B}_{n+1}(u) \|_\infty$.

Donc pour $n \geq 2$

$$\| u - \hat{B}_{n+1}(u) \|_\infty \leq \frac{1}{8} \left(\| f - B_{n-1} f \|_\infty + \frac{1}{(n+1)} \| f \|_\infty + \frac{K}{(n+1)^\alpha} \right)$$

Or $\| f - B_{n-1} f \| \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{(n-1)^{\alpha/2}} \leq \frac{3K 2^{\alpha/2}}{2} \times \frac{1}{n^{\alpha/2}}$

$\frac{1}{n+1} \| f \|_\infty \leq \frac{\| f \|_\infty}{n} \leq \frac{\| f \|_\infty}{n^{\alpha/2}}$

$\frac{K}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{K}{n^{\alpha/2}}$.

On peut prendre $M = \max \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3K 2^{\alpha/2}}{2} + 1 + K \right), \| u - \hat{B}_2 u \|_\infty \right)$