Polytechnique Filières MP 2012 Mathématiques A.

Représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie de SU(2, $\mathbb{C}$)

Première partie

1.a) - $M_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}^4$ sa dimension comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donc 8

- Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 & \alpha_2 + i\beta_2 \\ \alpha_3 + i\beta_3 & \alpha_4 + i\beta_4 \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{C})$ (les α_i et les β_i sont réels).

$\mathrm{Tr}(A) = (\alpha_1+\alpha_4) + i(\beta_1+\beta_4)$, ${}^tA + \bar{A} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2+\alpha_3+i(\beta_3-\beta_2) \\ (\alpha_3+\alpha_2)+i(\beta_2-\beta_3) & 2\alpha_4 \end{pmatrix}$

Donc A est dans $\mathcal{L}$ si et seulement

$$\alpha_1+\alpha_4 = \beta_1+\beta_4 = 2\alpha_1 = 2\alpha_4 = \alpha_3+\alpha_2 = \beta_2-\beta_3 = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} i\beta_1 & \alpha_2+i\beta_2 \\ -\alpha_2+i\beta_2 & -i\beta_1 \end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \beta_1 E - \alpha_2 F + \beta_2 G$$

$\mathcal{L}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 engendré par E, F et G (il est clair que la famille (E, F, G) est libre.)

1B) $[E, F] = -2G$ $[F, G] = -2E$ $[G, E] = -2F$

2a) $\forall k \in \mathbb{N} \cdot \forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $0 \leq ||| \frac{1}{k!} A^k ||| \leq \frac{1}{k!} |||A|||^k$

et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} |||A|||^k$ converge. (vers $\exp |||A|||$, ou plus élémentairement en utilisant la règle de d'Alembert)

donc $\sum_{k\geq 0} ||| \frac{1}{k!} A^k |||$ converge

donc $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge absolument, et puisque

$M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge. (complétude)

2.B) $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ est un morphisme
$A \mapsto PAP^{-1}$
d'algèbre. $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $|||\Phi(A)||| \leq (|||P|||\,|||P^{-1}|||)\,|||A|||$ donc Φ qui est linéaire est continue. (On pouvait aussi remarquer que $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie)

On aura $\forall N \in \mathbb{N}$ $\Phi\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (\Phi(A))^k$

et puisqu'on peut passer à la limite grâce à la continuité

$$\Phi(\exp A) = \exp(\Phi(A))$$

$$\underline{P(\exp A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})}$$

2C) Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$

deux matrice triangulaires supérieures et α un complexe alors αA, $A+B$ et AB sont triangulaires supérieures de plus

$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 & & \times \\ & & \\ 0 & & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & & \times \\ & & \\ 0 & & \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \times \\ & & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$.

On en déduit par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$ $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \times \\ & & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

$\forall N \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \rho_1^{(N)} & & \times \\ & & \\ 0 & & \rho_n^{(N)} \end{pmatrix}$ avec $\rho_i^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_i^k$.

Par passage à la limite, puisque la convergence d'une suite de matrice est équivalente à la convergence des suites de ses coefficients, on obtient

$$\exp A = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

2d) Toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

On peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

D'après 2b) $\exp A = P \exp T \, P^{-1}$ et d'après 2c) $\exp T$ est triangulaire supérieure avec $\operatorname{diag}(\exp T) = (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

On a $\det(\exp A) = \det(\exp T)$ (car $\exp A$ et $\exp T$ sont semblables)

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

$$= e^{\operatorname{Tr}(T)}$$ (car T est triangulaire supérieure)

$$\det(\exp A) = e^{\operatorname{Tr}(A)}$$ (car T et A sont semblables).

Deuxième partie

3) . $I_n \in U(2, \mathbb{C})$ car ${}^t I_n \overline{I_n} = I_n^2 = I_n$.

. $\forall (A,B) \in U(2,\mathbb{C})^2$ ${}^t(AB)\overline{AB} = {}^tB\,{}^tA\overline{A}\,\overline{B} = {}^tB I_n \overline{B} = {}^tB\overline{B} = I_n$.

. $\forall A \in B$ ${}^tA\overline{A} = I_n$ donc $\det A \, \overline{\det A} = 1$ donc $\det A \neq 0$

$U(2,\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$. et si A est dans

et ~~et $A \in$~~ $GL_2(\mathbb{C})$ A est dans $U_2(\mathbb{C})$ ssi $A^{-1} = {}^t\overline{A}$.

On a alors $(A^{-1})^{-1} = ({}^t\bar{A})^{-1} = {}^t(\bar{A}^{-1}) = {}^t(\overline{A^{-1}})$

donc $A^{-1} \in U(2, \mathbb{C})$

les trois propriétés caractéristiques d'un sous-groupe sont vérifiées $U(2,\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{C})$.

$SU(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ avec $\varphi : U(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$
$M \mapsto \det M$

φ est un morphisme de groupe donc $SU(2,\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $U(2,\mathbb{C})$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$. ${}^tA\bar{A} = \begin{pmatrix} |a|^2+|c|^2 & a\bar{b}+c\bar{d} \\ b\bar{a}+d\bar{c} & |b|^2+|d|^2 \end{pmatrix}$

A est dans $SU(2,\mathbb{C})$ si et ~~seulem~~ seulement si

$$\mathcal{S}\begin{cases} ad - bc = 1 & (1) \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 & (2) \\ |d|^2 + |b|^2 = 1 & (3) \\ \bar{a}b + d\bar{c} = 0 & (4) \\ a\bar{b} + \bar{d}c = 0 & (5) \end{cases}$$

En multipliant (1) par $-\bar{c}$ et (4) par a et en additionnant membre à membre on obtient, d'après (2) $b = -\bar{c}$. De même $\bar{d} \times (1) + b(5)$ donne $d = \bar{a}$.

$\mathcal{S}$ implique donc $\mathcal{S}_1 \begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ c = -\bar{b} \\ d = \bar{a} \end{cases}$

On vérifie que $\mathcal{S}_1$ implique $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_1$ $|b| = |c|$ $|d| = |a|$).

Donc $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1$ sont équivalents

5a) On a
$$
\begin{aligned}
{}^t X \overline{X} &= {}^t X I_n \overline{X} \\
&= {}^t X \, {}^t M \overline{M} \overline{X} \\
&= {}^t(MX) \, \overline{MX} \\
&= {}^t(\lambda X) \left(\overline{\lambda X}\right) \\
{}^t X \overline{X} &= |\lambda|^2 \, {}^t X \overline{X}
\end{aligned}
$$

or ${}^t X \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ <u>donc $|\lambda|^2 = 1$ et $|\lambda| = 1$.</u>

5b) $\underline{{}^t X \overline{M} \, \overline{Y}} = \frac{1}{\lambda} \, {}^t X \, {}^t M \overline{M} \, \overline{Y} = \underline{\frac{1}{\lambda} \, {}^t \overline{X} Y = 0}$.

6a) Soit M dans $SU(2, \mathbb{C})$. Le corps est $\mathbb{C}$ donc M possède au moins un vecteur propre X et on peut supposer $\|X\| = 1$. Complétons (X) en une base orthonormale (X, Y) de $\mathbb{C}^2$. On a ${}^t \overline{X} Y = 0$ donc ${}^t X \overline{Y} = 0$ donc ${}^t X \overline{M} \overline{Y} = 0$, puis finalement ${}^t \overline{X} M Y = 0$. Donc MY est orthogonal à X et par conséquent colinéaire à Y. $MY = \mu Y$. Soit P la matrice de passage de (X, Y) à la base canonique. On a $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donc λ et μ sont valeurs propres de M et d'après 5a) $|\lambda| = 1 = |\mu|$.
Or $\det M = 1$ donc $\mu\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{\lambda} = \overline{\lambda}$ et $\lambda = e^{i\theta}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad {}^t P^{-1} \overline{P^{-1}} = \begin{pmatrix} {}^t X \overline{X} & {}^t X \overline{Y} \\ {}^t Y \overline{X} & {}^t Y \overline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et P^{-1} est dans $U(2, \mathbb{C})$ donc P est dans $U(2, \mathbb{C})$.

Si P n'est pas dans $SU(2, \mathbb{C})$ on remplace P par αP avec $\det(\alpha P) = \alpha^2 (\det P)$. Or $|\det P| = 1$ (déjà vu) donc il existe α avec $|\alpha| = 1$ et $\alpha^2 \det P = 1$.

<u>PS : On pourrait simplifier cette démonstration en prenant</u> $Y = \begin{pmatrix} -\overline{x_2} \\ \overline{x_1} \end{pmatrix}$

6 b). Soit R et S dans $SU(2,\mathbb{C})$.

Il est clair que ii) $\Rightarrow$ i). Il s'agit de prouver i) $\Rightarrow$ ii)

On suppose $Tr(R) = Tr(S)$

On peut écrire $R = P_1^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P_2$ $\quad S = P_2^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\varphi}\end{pmatrix}P_2$

où $(P_1, P_2) \in SU(2,\mathbb{C})^2$.

$$Tr(R) = Tr(S) \Leftrightarrow \cos\theta = \cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \varphi \mod 2\pi \\ \theta = -\varphi \mod 2\pi \end{cases}$$

Supposons $Tr(R) = Tr(S)$.

Si $\theta = \varphi$ $R = P_1^{-1} P_2 S P_2^{-1} P_1 = (P_2^{-1}P_1)^{-1} S (P_2^{-1}P_1)$ et

$P = (P_2^{-1}P_1) \in SU(2,\mathbb{C})$

Si $\theta = -\varphi$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$= F \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi}\end{pmatrix} F^{-1}$$

$$R = (P_1^{-1} F P_2) S (P_2^{-1} F^{-1} P_1)$$
$$R = (P_2^{-1} F^{-1} P_1)^{-1} S (P_2^{-1} F^{-1} P_1)$$

et $P = P_2^{-1} F^{-1} P_1 \in SU(2,\mathbb{C})$

7a) ~~Soit~~ $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(A+B)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{p+q=\ell} \frac{1}{p!q!} A^p B^q$

car, puisque $AB = BA$, la formule du binôme donne

$$(A+B)^{\ell} = \sum_{p+q=\ell} \frac{\ell!}{p!q!} A^p B^q.$$

Soit $E_n = \{(p,q),\ 0 \le p,q \le n \quad p+q \le n\}$

$F_n = \{(p,q),\ 0 \le p,q \le n\}$

et $u_{p,q} = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}A^p B^q$

alors $E_n \subset F_n$ et

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(A+B)^l = \sum_{(p,q)\in E_n} u_{p,q}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}A^p \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}B^q = \sum_{(p,q)\in F_n} u_{p,q}$$

Donc $C_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(A+B)^l - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}A^j \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}B^k = \sum_{(p,q)\in F_n - E_n} u_{p,q}$

et $|||C_n||| \le \sum_{(p,q)\in F_n - E_n} |||u_{p,q}|||$ $\cancel{\le \sum_{(p,q)\in F_n} |||u_{p,q}||| - \sum_{(p,q)\in E_n} |||u_{p,q}|||}$

$\cancel{|||C_n||| \le \sum_{l=0}^{n} \sum_{p+q=l} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} |||A|||^p |||B|||^q - \sum_{p=0}}$

$$|||C_n||| \le \sum_{p,q\in F_n - E_n} \frac{1}{p!q!} |||A|||^p |||B|||^q$$ (car ||| ||| est une norme matricielle)

$$\le \sum_{p,q\in F_n} \frac{1}{p!q!} |||A|||^p |||B|||^q - \sum_{(p,q)\in E_n} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} |||A|||^p |||B|||^q$$

$$0 \le |||C_n||| \le \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}|||A|||^p \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}|||B|||^q - \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(|||A|||+|||B|||)^l$$

---

or le membre de droite tend vers $e^{|||A|||}e^{|||B|||} - e^{|||A|||+|||B|||}$ c'est à dire 0, on a donc $\lim_{n\to+\infty} C_n = 0$ soit $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

7b) les applications $M \mapsto {}^tM$ $M \mapsto \overline{M}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires et $M_2(\mathbb{C})$ est de dimension finie (1.a). donc elles sont continues. Or a ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ et $\overline{A^k} = \overline{A}^k$, on en déduit comme en. 2.b) que ${}^t\exp A = \exp {}^tA$ et $\overline{\exp A} = \exp(\overline{A})$

Si A est dans $\mathcal{L}$ ${}^tA + \overline{A} = 0$ donc ${}^tA = -\overline{A}$ et ${}^tA$ et $\overline{A}$ commutent. donc $I_2 = \exp({}^tA + \overline{A}) = \exp {}^tA \exp \overline{A}$

soit ${}^t(\exp A)\, \overline{\exp A} = I_2$.

Finalement $\underline{\exp(\mathcal{L}) \subset SU(2, \mathbb{C})}$

7c) Toute matrice de $SU(2,\mathbb{C})$ s'écrit $A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$, $P \in SU(2,\mathbb{C})$

Or $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} := \exp(\theta . E)$

D'après 2.b) $A = \exp \theta(P^{-1}EP)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $P^{-1}EP$ est dans $\mathcal{L}$.

${}^t(P^{-1}EP) = {}^tP\, {}^tE\, {}^tP^{-1} = \overline{P^{-1}}(-\overline{E})\overline{P} = -\overline{(P^{-1}EP)}$ $\underline{\text{q.e.d.}}$

$\underline{\exp : \mathcal{L} \mapsto SU(2, \mathbb{C}) \text{ est donc surjective}}$

7d) $\underline{\exp(2\pi E) = \exp(0) = I_2}$. donc $\exp_{|\mathcal{L}}$ $\underline{\text{n'est pas injective}}$

8) G contient au moins un élément A distinct de I_2 et $-I_2$ donc de la forme $Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} Q$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $Q \in SU(2, \mathbb{C})$. En prenant $P = Q^{-1}$ dans l'hypothèse vérifiée par G et $g = A$ on obtient $\underline{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in G}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$

8b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i\theta} & b e^{-i\theta} \\ -\bar{b} e^{i\theta} & \bar{a} e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} e^{-i\theta} & -b e^{i\theta} \\ \bar{b} e^{-i\theta} & a e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

les coefficients diagonaux de $A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

sont $|a|^2 + |b|^2 e^{-2i\theta}$ et $|b|^2 e^{2i\theta} + |a|^2$

soit $|a|^2 + (1-|a|^2) e^{-2i\theta}$ et $|a|^2 + (1-|a|^2) e^{2i\theta}$.

8c) $\forall A \in SU(2,\mathbb{C})$ $A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A^{-1} \in G$ (hypothèse)

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}^{-1} \in G.$$

donc $\forall A \in SU(2,\mathbb{C})$ $g = A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \in G$

or $\operatorname{tr}(g) = (2\cos 2\theta)(1-|a|^2) + 2|a|^2.$

$$= 2\left(\cos 2\theta + |a|^2 (1 - \cos 2\theta)\right)$$

or $\forall \lambda \in [0,1]$ ~~$\exists (a,b) \in \mathbb{C}$~~ $\begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{1-\lambda^2} \\ -\sqrt{1-\lambda^2} & \lambda \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$

donc $\bigcup_{g \in G} \operatorname{Tr}(g)$ contient $[2\cos 2\theta, 2]$

Or $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ donc $2\cos 2\theta < 2$. et $2\cos 2\theta = 2-\delta$ avec $\delta > 0$.

9) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ $\exists q \in \mathbb{N}$ $2\cos\frac{\theta}{q} \geq 2-\delta$ (car $\lim \cos\frac{\theta}{q} = 1$)

D'après la question précédente il existe g dans G tel que ~~Tr~~ $\mathrm{Tr}(g) = 2\cos\frac{\theta}{9}$. On peut écrire

$$g = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{9}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{9}} \end{pmatrix} P$$ avec $P \in SU(2,\mathbb{C})$ (en remplaçant s'il le faut g par g^{-1}). Comme en 8a.

on prouve que $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{9}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{9}} \end{pmatrix} = A$ est dans G.

On en déduit que $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = A^9$ est dans G.

Or tout élément de $SU(2,\mathbb{C})$ s'écrit $P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$ avec P dans $SU(2,\mathbb{C})$. La propriété de G permet alors d'affirmer que tout élément <u>de $SU(2,\mathbb{C})$ est dans G</u>

<u>Rq</u> Un sous-groupe vérifiant la propriété 8) est dit distingué. Si le sous-groupe H est distingué la relation d'équivalence $xy^{-1} \in H$ est compatible avec la loi de groupe on peut définir sur l'ensemble quotient une structure de groupe qu'on appelle groupe quotient. Ici $\{I_2, -I_2\}$ est un sous groupe distingué de $SU(2,\mathbb{C})$ c'est la raison pour laquelle l'auteur peut parler du groupe $SU(2,\mathbb{C})/_{\{I_2,-I_2\}}$ même s'il n'aurait pas dû car les groupes quotients sont totalement hors-programme.

Troisième partie

10) $(u,v) \mapsto [u,v]$ est $\mathbb{C}$-linéaire donc

$$\underline{e\circ z - z\circ e} = (e\circ f - f\circ e) + i(e\circ g - g\circ e) = -2g + 2i f = \underline{2i z}$$

de même

$$\underline{e\circ w - w\circ e = -2i w}$$

et

$$\underline{z\circ w - w\circ z} = [f+ig, f-ig] = \underbrace{[f,f]}_{0} + i\underbrace{[g,f]}_{2e} - i\underbrace{[f,g]}_{-2e} + \underbrace{[g,g]}_{0} = \underline{4ie}$$

11. $e(z(x)) = z(e(x)) + 2i\, z(x)$

Donc si $e(v) = \lambda v$ alors $e(z(v)) = (\lambda + 2i)\, z(v)$

puis par récurrence $\underline{e(z^k(v)) = (\lambda + 2ki)\, z^k(v)}$

12). e possède au moins un vecteur propre v. Si $z^k(v)$ n'est pas nul $z^k(v)$ est vecteur propre de e associé à la valeur propre $\lambda + 2ki$. Or v ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc k tel que $z^k(v) = 0$

Soit $\underline{k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}\ z^k(v) \neq 0\}}$ (un tel k_0 existe car $z^0(v) \neq 0$ et $z^k(v) = 0 \Rightarrow z^{k+1}(v) = 0$). Soit $\underline{v_0 = z^{k_0}(v)}$. alors v_0
$\underline{\text{est vecteur propre de } e}$ et $\underline{z(v_0) = 0}$

13) Soit $v_k = w^k(v_0)$ $\quad e(v_0) = \lambda_0 v_0$

$$e(v_1) = e(w(v_0)) = w(e(v_0)) - 2i\, w(v_0) = (\lambda_0 - 2i)\, w_0.$$

Comme en 11) on aura $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)\, v_k$.

- $z(v_1) = z(w(v_0)) = w(z(v_0)) + 4i\, e(v_0) = 4i\lambda_0 v_0$.

- $z(v_{k+1}) = z(w(v_k)) = w(z(v_k)) + 4i\, e(v_k)$

Par exemple
$$z(v_2) = w((4i\lambda_0) v_0) + 4i\, e(v_1) = 4i\lambda_0 v_1 + 4i(\lambda_0 - 2i) v_1$$

On peut conjecturer $z(v_k) = \alpha_k v_{k-1}$.

. $\alpha_1 = 4i\lambda_0$ .. ~~dans~~

. On suppose le résultat vrai à l'ordre k, on a alors

$$z(v_{k+1}) = w(z(v_k)) + 4i\, e(v_k)$$
$$= \alpha_k v_k + 4i(\lambda_0 - 2ik) v_k$$

$$z(v_{k+1}) = \alpha_{k+1} v_k \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)$$

Finalement $\underline{\alpha_k} = \sum_{p=0}^{k-1} 4i(\lambda_0 - 2ik) = \underline{4i(k\lambda_0 - ik(k-1))}$

<u>14a)</u> Tant qu'ils sont non nuls les v_k sont des vecteurs propres de e associé à des valeurs propres distinctes, ils sont donc linéairement indépendant. De plus $v_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} = 0$

Donc on obtient l'existence du n comme en 12).

<u>14b)</u> $w_{n+1} = 0$ donc $z(v_{n+1}) = 0$ Or $v_n \neq 0$ donc $\alpha_{n+1} = 0$

Or $\alpha_{n+1} = 4i(n+1)(\lambda_0 - in)$. Donc $\underline{\lambda_0 = in}$.

<u>Les résultats demandés s'obtiennent en remplaçant</u>

<u>λ_0 par in</u> dans toutes les formules données précédemment

(et <u>k par n pour la dernière ligne</u>).