Exercices classiques II

Les exercices peuvent être résolus dans n'importe quel ordre.

Exercice 1:
Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} a^n$ $(a > 0)$.

Exercice 2:
On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Etudier la suite (I_n) (monotonie,limite).
3) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} I_n$.
4) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
5) En déduire l'expression de I_n.
6) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} I_n$.

Exercice 3:
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ inversible dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que son inverse est dans $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement $\det A = \pm 1$.

Exercice 4:
Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 5:

1) Donner une condition nécessaire sur le nombre complexe s pour que la fonction $t \mapsto te^{-st}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$, donner alors la valeur de son intégrale sur cet intervalle.
2) Ecrire, sur un domaine de valeurs de x qu'on précisera, la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t \cos xt}{e^t + 1} dt$$

comme la somme d'une série de fonctions, en utilisant le théorème classique de permutation de l'intégration et de la sommation.

Tourner la page, S.V.P.

Exercice 6:
Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

On ne sera pas tenu de mener les calculs jusqu'à leur terme.

Exercice 7:
Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire

$$Z(M_n(\mathbb{K})) = \{M \in M_n(\mathbb{K}); \forall N \in M_n(\mathbb{K})\ MN = NM\}.$$

Exercice 8:
Déterminer le nombre d'éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}}$. Justifier la caractérisation employée.

Exercice 9:
Montrer que si

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 10:
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$.
1) Etudier la continuité de f
2) Etudier la dérivabilité de f.
3) Calculer f.

Exercice 11:
1) Déterminer les matrices symétriques A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(E) \qquad A^3 + A - 2I_n = 0$$

2) Montrer que si une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifie (E) alors $\det(A) > 0$.

Exercice 12: *Pour départager les ex-aequo*
Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent alors $exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Dans un premier temps on pourra admettre l'existence d'une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\|AB \leq \|A\| \|B\|$.