Annexe A

Espaces vectoriels, applications linéaires

A.1 Bases

On peut supposer que les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont des espaces vectoriels sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (convention du programme). Mais il nous suffira de choisir un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

A.1.1 Familles à support fini

Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un groupe commutatif est dite à support fini si et seulement si l'ensemble des i pour lesquels $\lambda_i \neq 0$ est fini. On peut parler d'une famille de vecteurs à support fini, d'une famille de scalaires à support fini. Remarquons que la famille $(\lambda_i x_i)$ est à support fini si l'une des deux familles (λ_i) ou (x_i) est à support fini (mais la réciproque n'est pas vraie).

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments d'un groupe commutatif, notons K l'ensemble des i tels que $\lambda_i \neq 0$. Si J est une partie de I contenant K alors $\sum_{i\in J} x_i = \sum_{i\in K} x_i$. Le membre de gauche est indépendant de J on le note $\sum_{i\in I} x_i$.

On vérifie facilement que dans un groupe commutatif, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles à support fini alors il en est de même de $(x_i + y_i)_{i\in I}$ et

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

Dans un espace vectoriel on pourra de même multiplier par un scalaire.

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini, $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs, la famille $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ est à support fini et sa somme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ s'appelle une combinaison linéaire des (x_i).

Proposition A.1 *Si S est une partie d'un espace vectoriel, le sous-espace vectoriel engendré par S est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{s\in S} \lambda_s s$.*

A.1.2 Familles libres, génératrices ; bases

Définition A.1 *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de l'espace vectoriel E est libre si et seulement si la seule famille à support fini de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ pour laquelle $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ est la famille nulle.*

Notons $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$, alors formellement la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de l'espace vectoriel E est libre si et seulement si :

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} : \quad \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \ \lambda_i = 0.$$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

Exemple : la famille $(e^{cx})_{c\in\mathbb{C}}$ est libre.

Définition A.2 *Un famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de l'espace vectoriel E est génératrice si et seulement si l'ensemble $\{x_i; i \in I\}$ engendre E.*

Ceci s'écrit formellement :

$$\forall x \in E\ \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Définition A.3 *Une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice s'appelle une base.*

Ceci s'écrit formellement :

$$\forall x \in E\ \exists!\, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Les λ_i s'appelle les coordonnées (ou composantes) de x dans dans la base.
Exemple (officiel) : la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
Exemple (officiel) : on note $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ la sous-algèbre des fonctions numériques engendrée par les fonctions

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k,\ 1 \leq k \leq n.$$

Si $\mathbb{K}$ est infini, une base de cet espace vectoriel est la famille

$$(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in N^n}.$$

A.1.3 Bases et applications linéaires

Une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est un morphisme d'espaces vectoriel. C'est donc une application f vérifiant :

$$\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K} \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Proposition A.2 *Donnons nous une base $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E (sur $\mathbb{K}$) et une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel F(sur $\mathbb{K}$). Il existe une unique application linéaire f de E vers F telle que pour tout i on ait $f(e_i) = f_i$.*

C'est l'application telle que pour toute famille $(\lambda_i) \in K^{(I)}$:

$$f(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i.$$

Cette application est injective si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre, surjective si elle est génératrice. C'est un isomorphisme si la famille est une base.

A.2 Sommes, sommes directes

A.2.1 Somme d'une famille de sous-espaces

Définition A.4 *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille (finie) de sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de ces sous-espaces le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient la réunion des E_i. On le note $\sum_{i\in I} E_i$. Il est formé des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ (à support fini dans le cas où l'ensemble I n'est pas fini), où pour tout i l'élément x_i appartient à E_i.*

Définition A.5 *Avec les mêmes notations, les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall j \in I \quad E_j \bigcap \sum_{i\in I-\{j\}} E_i = \{0\}, \\ \forall (x_i) \in E^{(I)} \quad (\sum_{i\in I} x_i = 0 \text{ et } \forall i \in I\, x_i \in E_i) \Rightarrow \forall i \in I\ x_i = 0, \\ \forall x \in \sum_{i\in I} E_i\ \exists! (x_i) \in E^{(I)} \quad \forall i \in I\ x_i \in E_i) \text{ et } x = \sum_{i\in I} x_i. \end{array}\right.$$

Si ces hypothèses sont vérifiées on dit que la somme des E_i est directe et on écrit :

$$\sum_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i.$$

Exemple : deux sous-espaces.

Exemple : trois sous-espaces.

Définition A.6 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, tout sous-espace G de E tel que $F \oplus G = E$ s'appelle un supplémentaire de F. On dit aussi que F et G sont supplémentaires.*

Attention ! Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire.

A.2.2 Cas de la dimension finie

Par définition un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède un système générateur fini. Il possède alors une base de cardinal fini et toute les bases ont le même cardinal. Ce cardinal s'appelle la dimension de l'espace.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, on a les résultats suivants :
- Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs, et si elle possède n vecteurs c'est une base de E.
- Toute partie libre possède au plus n vecteurs, et si elle possède n vecteurs c'est une base.
- Toute partie libre (même vide) peut être complétée en une base en extrayant des vecteurs d'une famille génératrice. (En particulier de toute famille génératrice on peut extraire une base).
- Tout sous espace vectoriel F de est de dimension finie et inférieure à n.
- Deux sous-espaces vectoriels de E sont égaux si l'un contient l'autre et ils sont de même dimension.
- Si F est un autre espace de dimension finie, il en est de même de $\mathcal{L}(E,F)$ et $E\times F$, qui sont de dimensions $\dim E.\dim F$ et $\dim E + \dim F$.

Si $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille finie de sous-espaces de dimension finie, alors leur somme est de dimension finie, au plus égale à la somme des dimensions des sous-espaces considérés. De plus la somme est directe si et seulement si la dimension de la somme est égale à la somme des dimensions.

Plus précisément on a le théorème des quatre dimensions :

Théorème A.1 (théorème des quatre dimensions) *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriel de dimension finie, il en est de même de $F+G$ et $F\cap G$ et :*

$$\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F\cap G).$$

Théorème A.2 *Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-espaces en somme directe d'un espace vectoriel E alors*

$$\dim \bigoplus E_i = \sum \dim E_i$$

De plus $E = \bigoplus E_i$ si et seulement $\dim E = \sum \dim E_i$.

Proposition A.3 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace admet au moins un supplémentaire.*

Remarque : il en admet généralement une infinité.

Un exemple officiellement au programme : Dans $\mathbb{K}[X]$ l'idéal engendré par un polynôme de degré $n+1$ est un sous-espace vectoriel qui admet pour supplémentaire l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

A.2.3 Bases adaptées

Définition A.7 *Une base $(e_1,\dots,e_n)$ d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est adaptée au sous espace F de E s'il existe un p tel que $(e_1,\dots,e_p)$ soit une base de F. Elle est adaptée à la décomposition $E = F\oplus G$ si il existe p tel que $(e_1,\dots,e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de G*

Une telle définition s'étend facilement à celle d'une base adaptée à une décomposition en somme directe de r sous-espaces. Si $E = \bigoplus_{1\leq i\leq r} E_i$ on obtient une base adaptée à cette décomposition en concaténant des base $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ des E_i. En particulier il existe toujours au moins une base adaptée.

A.3 Recollement d'applications linéaires

Si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'applications linéaires de E_i vers F, alors il existe une unique application linéaire de E vers F dont la restriction à chaque E_i soit u_i.

Un exemple : Si $E = \bigoplus_{1\leq i\leq r} E_i$, il existe une unique application linéaire p_i telle $p_i(x) = x$ si x appartient à E_i et $p_i(x) = 0$ si x appartient à E_j, $i\neq j$. p_i est la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$. La famille $(p_1,\dots,p_r)$ vérifie

1. $\forall i\ p_i\circ p_i = p_i$ (p_i est un projecteur) ;
2. pour $i\neq j$ $p_i\circ p_j = 0$;
3. $\mathrm{Id}_E = p_1+\dots+p_r$.

Réciproquement si on se donne une famille $(p_1,\dots,p_r)$ d'applications linéaires vérifiant les relations précédentes, alors E est la somme directe de $\mathrm{Im}\ p_i$ et p_i est la projection sur $\mathrm{Im}\ p_i$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ p_i = \bigoplus_{j\neq i} E_j$.

A.4 Image et noyau d'une application linéaire

On rappelle que le noyau Ker $f = \{x; f(x) = 0\}$ et l'image Im $f = f(E) = \{f(x); x \in E\}$ d'une application linéaire f sont des sous-espaces vectoriels de E et F. f est injective si et seulement si Ker $f = \{0\}$, surjective si et seulement si Im $f = F$.

Exercice : D'un manière plus générale, prouver que l'image d'un sous-espace vectoriel et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple : Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E, l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{K}^p & \to & E \\ & & (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \mapsto & \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \end{array}$$

est linéaire. Elle est injective si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, surjective si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice. C'est un isomorphisme si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E.

Théorème A.3 *Si u est une application linéaire de E vers F, la restriction de u à tout supplémentaire de* Ker u *définit un isomorphisme de ce supplémentaire sur* Im u.

Remarque : il n'est pas besoin de supposer les espaces de dimension finie.

Application : Le théorème du rang.

Théorème A.4 (Le théorème du rang) *Si u est une application linéaire d'un space de dimension finie E vers un espace F, qui n'est pas supposé de dimension finie, alors* Im u *est de dimension finie et en notant* $\mathrm{rg}\,(u) = \dim \mathrm{Im}\ u$ *(le rang de u) on a :*

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{rg}\ u.$$

Rappel : caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives et bijectives en dimension finie.

A.4.1 Application : Le polynôme d'interpolation de Lagrange

A.4.1.1 Première version

Soit $(a_0, \dots, a_n)$ $n+1$ éléments disctincts du corps $\mathbb{K}$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

est linéaire. D'après le théorème de Gauss son noyau est l'idéal engendré par $T = (X - a_0) \cdots (X - a_n)$. Un supplémentaire de ce sous-espace est $\mathbb{K}_n[X]$, ϕ réalise donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur son image. Celle-ci est par conséquent de dimension $n+1$, et donc égale à $\mathbb{K}^{n+1}$.Ceci prouve que ϕ est un isomorphisme. Il en résulte :

$$\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad \exists! P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \forall i \in [0, n]\ P(a_i) = y_i.$$

Si les y_i sont les valeurs d'une fonction en les a_i, on dit que P est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en ces points.

L'inconvénient de cette version est qu'elle n'est pas constructive. Elle ne nous donne pas directement le polynôme. Son avantage est qu'elle peut s'adapter pour obtenir un polynôme d'interpolation à un ordre supérieur.

A.4.1.2 Deuxième version

Elle peut déjà avoir été vue lors d'une extension du lemme des restes chinois aux polynômes.

Il s'agit en fait de résoudre les congruences

$$P \equiv y_i \bmod (X - a_i),\ 0 \le i \le n.$$

Puisque les $(X - a_i)$ sont premiers entre eux deux à deux, d'après le lemme des restes chinois il existe une unique solution modulo T. Ceci ce démontre d'ailleurs directement : deux solutions sont congrues modulo T et si P tout polynôme congru à p modulo T est aussi une solution ; il suffit donc d'obtenir une solution. Pour cela on adapte la méthode de Gauss pour les entiers à $\mathbb{K}[X]$. On cherche une famille de polynômes L_i tels que pour tout i on ait $L_i \equiv 1 \bmod (X - a_i)$ et pour j différent de i $L_i \equiv 0 \bmod (X - a_j)$. Un tel polynôme de degré inférieur ou égal à n est nécessairement de la forme

$$L_i = \lambda \prod_{j \ne i} (X - a_j),$$

la condition $L_i \equiv 1 \bmod (X - a_i)$ conduisant finalement à

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

Une solution du système de congruences est

$$\sum_{i=0}^{n} y_i L_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

C'est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

A.4.1.3 Troisième version

Résolution directe d'un système , en utilisant un déterminant de Vandermonde [1].

Proposition A.4 *Soit E' un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Soient F_1 et F_2 deux supplémentaires de E', alors la projection de E sur F_1 parallèlement à E' induit un isomorphisme de F_2 sur F_1*

Définition A.8 *On dit qu'un sous-espace F de E est de codimension finie si il admet un supplémentaire de dimension finie. Sa codimension est la dimension de ce supplémentaire.*

Remarque : d'après la proposition précédente tous les supplémentaires ont même dimension, la définition est donc cohérente.

Remarque : on peut montrer qu'un sous-espace F est de codimension finie si et seulement si il existe G de dimension finie tel que $F + G = E$.

Définition A.9 *Un sous-espace de codimension 1 s'appelle un hyperplan.*

Proposition A.5 *Si F est un sous-espace d'un espace de dimension finie E alors*

$$\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E.$$

Proposition A.6 *Soit u une application linéaire de E vers F, où F est un sous-espace de dimension finie. Son noyau est de codimension finie et l'on a :*

$$\text{rg } u = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u.$$

Remarque : dans la proposition précédente, l'existence du supplémentaire doit être justifiée, il ne suffit pas de démontrer qu'un tel supplémentaire est de dimension finie.

A.5 L'espace dual

Définition A.10 *Soit E un espace vectoriel sur K. Le dual de E est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, noté E^*.*

Exemple de forme linéaire : $\delta_a : f \mapsto f(a)$

Proposition A.7 *Soit H un sous-espace vectoriel. H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. De plus les formes linéaires ayant cette propriété sont exactement les multiples de φ. On dit que φ est une équation de H.*

Définition A.11 *L'application de $E^* \times E$ vers $\mathbb{K}$, qui à (ϕ, x) associe le scalaire $< \phi, x >= \phi(x)$ est une forme bilinéaire, dite canonique. On parle aussi parfois du crochet de dualité.*

1. Vandermonde Alexandre Paris 1735-Paris 1796

A.6 Dualité en dimension finie

Théorème A.5 *Si E est de dimension finie alors le dual de E est de dimension finie et il est de même dimension que E.*

En effet, la dimension de $L(E,F)$ est finie si E et F sont de dimension finie, et sa valeur est $(\dim E) \times (\dim F)$. Il suffit ici d'appliquer ce résultat avec $F = \mathbb{K}$.

Remarque : E et son dual sont donc isomorphes.

Proposition A.8 *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique n-uplet $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de E^* tel que pour tout couple (i,j) on ait : $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$. Ce n-uplet est une base de E^* dite base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$, notée $\mathcal{B}^*$.*

L'existence du n-uplet résulte de ce que toute application linéaire est définie de manière unique par l'image d'une base, donc chaque e_j^* existe et est unique. Soit y^* un élément de E^*, s'il s'écrit sous la forme $a_1 e_1^* + ... + a_n e_n^*$, alors pour tout i on aura $y^*(e_i) = a_1 e_1^*(e_i) + \cdots + a_n e_n^*(e_i) = a_i$, donc les a_i sont déterminés de manière unique et le n-uplet est libre. D'après le théorème précédent, la dimension de $E*$ est n, donc le n-uplet, système libre de cardinal n est une base. On peut aussi remarquer que le système est générateur, puisque l'élément $y^*(e_1)e_1 * + ... + y^*(e_n)e_n *$ possédant même image que y^* sur une base de E lui est égal.

Remarque : On démontre à nouveau ainsi le théorème précédent. Un isomorphisme étant celui qui transforme une base en sa base duale. Cet isomorphisme n'est pas canonique, il dépend de la base initialement choisie.

Proposition A.9 *Si x est un élément non nul de E, il existe une forme linéaire φ telle que $\phi(x) = 1$.*

Corollaire A.1 *Le seul vecteur annulé par toutes les formes linéaires est le vecteur nul.*

Proposition A.10 *Si $\mathcal{B} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est une base de E^*, il existe un unique n-uplet $(e_1, \ldots, e_n)$ de E tel que pour tout couple (i,j) on ait : $\phi_j(e_i) = \delta_{i,j}$. Ce n-uplet est une base de E dite base anté-duale de $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.*

Proposition A.11 *Si F est un sous-espace de E de dimension p l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace de E^* de dimension $n - p$.*

Proposition A.12 *Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_q)$ est une famille libre de formes linéaires sur un espace E de dimension n, l'intersection des noyaux des ϕ_i est un sous-espace vectoriel F de E de dimension $n - q$. Une forme linéaire est nulle sur F si et seulement si elle une combinaison linéaire des ϕ_i.*

A.7 Trace d'un endomorphisme

Définition A.12 *Si $A = (a_{i,j}$ est une matrice carrée appartenant à $M_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le nombre* $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$

Proposition A.13 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{tr} & : & M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \mathrm{tr}\ A \end{array}$$

est une forme linéaire.

Exercice. Montrer que toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}\ AM$.

Proposition A.14 *Si A et B sont deux matrices de $M_n(K)$,* $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

Exercice : montrer que ce résultat reste vrai si A appartient à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et B à $M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Corollaire A.2 *Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$ et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ alors* $\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,(A)$.

Application : si u est un endomophisme de E. La trace de la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ ne dépent pas de $\mathcal{B}$. On l'appelle la trace de u, toujours notée $\mathrm{tr}\ u$.

Proposition A.15 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{tr} & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathbb{K} \\ & & u & \mapsto & \mathrm{tr}\ u \end{array}$$

est une forme linéaire.

Proposition A.16 *Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.*

A.8 Calcul matriciel

Rappel : matrices équivalentes, interprétation en termes d'applications linéaires. Caractérisation par le rang. Application à A et ${}^tA$. Caractérisation du rang par les mineurs.

A.8.1 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Définition A.13 *Soit M une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous appellerons opération élémentaire sur la matrice M l'une des opérations suivantes :*

1. *Permutation de deux lignes de M,*
2. *Permutation de deux colonnes de M,*
3. *Ajout à une ligne d'un multiple quelconque d'une autre ligne.*
4. *Ajout à une colonne d'un multiple quelconque d'une autre colonne.*
5. *Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.*
6. *Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul.*

A.8.2 Interprétation en termes de produits matriciels

Notation : On notera :

$E_{k,l,n,p}$ la matrice $(\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p)}$, (la famille des $E_{k,l,n,p}$ est la base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$).

$D_{k,n}(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{k,k}$, pour $\lambda \neq 0$.

$P_{k,l,n}$ la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n)}$, pour $k \neq l$, avec $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ sauf si $\{i,j\} = \{k,l\}$ et de plus $a_{k,l} = a_{l,k} = 1$ et $a_{k,k} = a_{l,l} = 0$.

$Tk, l, n(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{k,l,n,n}$ pour $k \neq l$.

On remarquera que chacune de ces matrices est inversible ce qui aura une importance capitale dans la suite.

Proposition A.17 *Avec les notations précédentes, les opérations élémentaires sur une matrice $M_{n,p}(\mathbb{K})$ peuvent s'interprèter comme une multiplication à droite ou à gauche par l'une des matrices précédentes.*

1. *Permutation des lignes k et l de M : Multiplication à gauche par la matrice $P_{k,l,n}$,*
2. *Permutation des colonnes k et l de M : Multiplication à droite par la matrice $P_{k,l,p}$,*
3. *Ajout à la ligne k de λ fois la ligne l : Multiplication à gauche par la matrice $T_{k,l,n}(\lambda)$,*
4. *Ajout à la colonne l de λ fois la colonne k : Multiplication à droite par la matrice $T_{l,k,p}(\lambda)$,*
5. *Multiplication de la ligne k par le scalaire λ non nul : Multiplication à gauche par la matrice $D_{k,n}(l)$,*
6. *Multiplication de la colonne k par le scalaire λ non nul : Multiplication à droite par la matrice $D_{k,n}(l)$.*

A.8.3 Application à la recherche du rang d'une matrice

Théorème A.6 *Le rang d'une matrice ne change pas si l'on effectue sur cette matrice l'une des opérations élémentaires.*

Théorème A.7 *Il est possible par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $M = (a_{i,j})$ de la transformer en une matrice $M' = (b_{i,j})$ telle que la fonction définie par $f(j) = \min\{i \in \{1, ..., n\}, b_{i,j} \neq 0\}$ si cet ensemble est non vide et $+\infty$ si cet ensemble vide, soit croissante sur $\{1, ..., n\}$ et strictement croissante sur $f^{-1}(\mathbb{N})$. Une telle matrice est dite échelonnée en colonnes.Le rang de la matrice M est alors le nombre de colonnes non nulles de la matrice M'.*

Remarque : Il existe un théorème similaire utilisant les transformations élémentaires sur les lignes.

A.8.4 Application à la résolution des systèmes linéaires

Définition A.14 *Si $AX = B$ est un système linéaire de n équations à p inconnues écrit sous forme matricielle, avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, on appellera matrice associée au système la matrice de $M_{n,p+1}(K)$ égale à $(A\,|\,B)$.*

Méthode : Pour résoudre le système $AX = B$ on transforme à l'aide de transformations élémentaires sur les lignes la matrice associée à ce système pour obtenir une matrice $M' = (c_{i,j})$ telle que la fonction f définie sur $\{1, ..., n\}$ par $f(i) = \min\{j \in \{1, ..., p+1\}, c_{i,j} \neq 0$ si cet ensemble n'est pas vide et $f(i) = +\infty$ sinon, soit croissante sur $\{1, ..., n\}$ et strictement croissante sur $f^{-1}(\mathbb{N})$. Une telle matrice est dite échelonnée en lignes. Deux cas sont alors possibles :

1. Il existe un i tel que $f(i) = p + 1$. Le système n'admet aucune solution.
2. Il n'existe pas de i tel que $f(i) = p + 1$. Le système admet alors une solution au moins. On peut obtenir toutes les solutions en exprimant les inconnues $x_{f(i)}$ pour $f(i) \neq +\infty$ à l'aide des autres inconnues par la formule :

$$c_{i,f(i)} x_{f(i)} = c_{i,p+1} - \sum_{k=f(i)+1}^{p} c_{i,k} x_k,$$

   i décroissant de $r = \max\{i; f(i) \neq +\infty\}$ à 1. (Si ce max n'existe pas tout X est solution).

Remarque : r est le rang de la matrice A.

S'il est non vide, l'espace des solutions est une variété affine de dimension $p-r$. L'espace des solutions de l'équation homogène est la direction de la variété des solutions de l'équation avec second membre.

Soit $\mathcal{E} = \{1, \ldots, p\} - \operatorname{Im} f$, soit j dans $\mathcal{E}$, on peut construire une unique solution du système $v_j = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq p}$ en posant $x_{j,j} = 1$, $x_{i,j} = 0$ si $i \in \mathcal{E}$ et $i \neq j$, puis en calculant les $(x_{i,j}$ restants par (2). On peut prouver que (v_j) est une base de l'espace vectoriel des solutions du système homogène.

A.8.5 Application à la recherche de l'inverse d'une matrice

Théorème A.8 *Il est possible par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice inversible de la transformer en la matrice unité. Les mêmes transformations appliquées à la matrice unité la transforme en l'inverse de la matrice initiale.*

Remarque : Il est possible d'utiliser la même méthode mais en opérant sur les lignes. Mais il est interdit d'opérer simultanément sur les lignes et les colonnes.

Remarque : si la matrice n'est pas inversible on s'en aperçoit en cours de route.

Remarque : il est possible de calculer l'inverse d'une matrice en $\mathcal{O}(n^3)$ opérations.

Remarque : condition pour qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser de permutations ; décomposition LU.

A.8.6 Application au calcul des déterminants

Théorème A.9 *Il est possible, par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice autres que la multiplication d'une d'une colonne par un scalaire, de la transformer en une matrice diagonale inférieure. Son déterminant est alors égal au signe près au produit des termes diagonaux de cette matrice, et le signe doit être changé pour chaque permutation de colonne opérée.*

Remarque : il est possible, en n'utilisant que des transvections sur les colonnes de transformer A en $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$ si $r < n$ est le rang de A, ou $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Application : $SL(n, \mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

Application : déterminer les applications de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telles que $f(AB) = f(A)f(B)$.