Chapitre 0

Fonctions d'une variable réelle
Les résultats de première année

Les résultats qui suivent ont été vu en première année. Ils doivent être parfaitement connus, tant par leur conclusion que par leurs hypothèses. Ils sont d'utilité constante, une méconnaissance ou même une connaissance imparfaite de ces outils constitue un handiap sévère.
Dans ce chapitre, sauf mention explicite d'autres hypothèses, toutes les fonction sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et à valeurs réelles. La plupart de ces résultats se généralisent aux espaces de dimension finie, et deviennent ainsi des résultats du cours de deuxième année, d'autres nécessitent impérativement que la fonction soit à valeurs réelles.
D'une manière générale j'ai incrit en gras les hypothèses qui doivent être impérativement rappelée au moment d'appliquer le théorème ou la proposition.
Convention : I, J, I_1,...désignent toujours des intervalles, A une partie quelconque.

0.1 Les résultats

Théorème 0.1 (Le théorème des valeurs intermédiaires) *L'image par une fonction* **continue** *et* **à valeurs réelles** *de tout intervalle est un intervalle.*

On peut exprimer d'un autre manière cet énoncé.

Théorème 0.2 (Le théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Soit $a \leq b$ deux points de I, et m dans $\mathbb{R}$ tel que $\min(f(a), f(b)) \leq m \leq \max(f(a), f(b))$ (ce qui peut aussi s'écrire $(m - f(a))(m - f(b)) \leq 0$), alors il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = m$.*

C'est le bon moment de réviser la recherche dichotomique d'un c tel que $f(c) = 0$ si $f(a)f(b) \leq 0$, avec sa programmation en Python.

Théorème 0.3 (Le théorème de la bijection) *Une fonction* **continue** *$f : I \to \mathbb{R}$ est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si elle est strictement monotone.*

Théorème 0.4 (Le théorème de Rolle) *(note[1]) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, vérifiant*
- *f est* **à valeurs réelles**,
- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 0.5 (L'égalité des accroissements finis) *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a < b$,* **à valeurs réelles**, *continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

1. Michel Rolle, Ambert 1652– Paris 1719. Rolle n'énonce pas ce théorème, mais utilise cette propriété sans la justifier alors qu'il étudie les racines réelles des polynômes.

Théorème 0.6 (Le théorème fondamental de l'analyse) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue** *sur l'intervalle I, à valeurs réelles. Alors f admet des primitives sur I. Si a est un point quelconque de I l'une d'elle est*

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

Les autres primitives sont les fonctions $F_a + k$ où k parcourt $\mathbb{R}$

Ce résultat ainsi que celui qui suit se généralisera aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.
Ce qu'il faut retenir de ce théorème c'est qe chaque fois que vous affirmez que la dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est $x \mapsto f(x)$ vous devez vous assurer et rappeler que f est continue.

Théorème 0.7 (Le théorème fondamental de l'analyse) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I alors pour tout couple (a, b) d'éléments de I :*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Le théorème qui suit, d'usage courant, est une des théorèmes du cours les plus mal appliqués.

Théorème 0.8 (Le théorème de la limite de la dérivée) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point, à valeurs réelles . On suppose :*

— *f est est continue sur I,*
— *$\tilde{f}$, la restriction de f à $I \backslash \{a\}$ est dérivable,*
— *$\lim_{x \to a} (\tilde{f})' = \ell$ existe*

Alors f est dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.

Ce théorème s'étend au cas $\ell = \pm\infty$, en s'autorisant des dérivées infinies.
Cet énoncé est celui du cours de première année, il vaut mieux apprendre celui du programme de deuxième année :

Théorème 0.9 (Le théorème de la limite de la dérivée) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point, à valeurs dans un espace de dimension finie, par exemple à valeurs complexes . On suppose :*

— *f est continue sur I,*
— *$\tilde{f}$, la restriction de f à $I \backslash \{a\}$ est de classe $\mathcal{C}^1$,*
— *$\lim_{x \to a} (\tilde{f})' = \ell$ existe*

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

0.2 Exemples de mise en application

Exemple : Le théorème de la bijection pour une fonction dérivable.

Exercice 0.1 *Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation*

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède au plus une solution x_n strictement positive.

Exemple : Le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 0.2 *La fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Exemple : L'application itérée du lemme de Rolle.

Exercice 0.3 *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0, 1]$ il existe c dans $]0, 1[$ tel que*

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Exemple : le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 0.4 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution du problème différentiel :*

$$y'' + y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$$

si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout x :

$$f(x) = a + bx + \int_0^x (x - t) f(t)\,dt.$$

0.3 Les démonstrations