Chapitre 4

Familles sommables de nombres complexes

Pré-requis : réviser le cours de première année sur les séries numériques.

4.1 Ensembles dénombrables

Définition 4.1 *Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec* $\mathbb{N}$

Un ensemble fini ou dénombrable sera parfois dit « au plus dénombrable ».

Proposition 4.1 *Un ensemble est fini ou dénombrable s'il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$.

Un ensemble dénombrable est donc infini, mais il existe des ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables. Montrons par exemple que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Soit en effet φ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit

$$A = \{n \in \mathbb{N}, n \notin \varphi(n)\}.$$

A est une partie de $\mathbb{N}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Si $n \in A$ alors $A \neq \varphi(n)$, par définition. Si $n \notin A$ alors $n \in \varphi(n)$, toujours par la définition de A, donc $A \neq \varphi(n)$, puisque n appartient à l'un mais pas à l'autre. Donc pour tout n on a $\varphi(n) \neq A$. φ n'est donc pas surjective et par conséquent n'est pas non plus bijective.

Démonstration :

Soit E un ensemble.

- Si E est fini, de cardinal n, il est en bijection avec la partie $[0, n[$ de $\mathbb{N}$.
- Si E est dénombrable, il est en bijection avec $\mathbb{N}$ qui est une partie de $\mathbb{N}$.
- Si E est en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$ alors il est fini. Soit on considère ceci comme un résultat du cours de première année, soit on adapte la démonstration qui suit pour montrer que E est en bijection avec une partie $[0, n[$ de $\mathbb{N}$.
- Si E est en bijection avec une partie infinie de $\mathbb{N}$ alors il est dénombrable car toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Etablissons ce dernier résultat.
  Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Définissons $\varphi : \mathbb{N} \to P$ par récurrence en posant
  - $\varphi(0) = \min P$ (existe car P est infinie donc non vide),
  - Pour $n \geq 0$ $\varphi(n+1) = \min(P - \{\varphi(k), 0 \leq k \leq n\})$ (existe car $P - \{\varphi(k), 0 \leq k \leq n\}$ est infini).

  φ est strictement croissante par construction donc injective. La surjectivité est un peu plus délicate à établir. On prouve par récurrence sur n que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \quad P \cap [0, n] = \varphi([0, p[).$$

Remarque 4.1 *On retiendra de la démonstration précédente que toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est en bijection croissante avec* $\mathbb{N}$. *C'est ce qui nous permet, lorsque l'ensemble des indices* n *d'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *tels que* u_n *vérifie une propriété* P *est infini, d'extraire de cette suite une suite* $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ *telle que pour tout* n $u_{\phi(n)}$ *vérifie* P.

Corollaire 4.1 *Toute partie d'un ensemble fini ou dénombrable est finie ou dénombrable.*

Proposition 4.2 *Un ensemble* X *est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une injection de* X *vers* $\mathbb{N}$.

En effet ϕ est une injection de X dans $\mathbb{N}$ si et seulement si ϕ est ue bijection de X sur la partie $\phi(\mathbb{N})$ de $\mathbb{N}$. En composant les injections adéquates on obtient immédiatement qu'un ensemble est fini ou dénombrable dès qu'il existe une injection de cet ensemble dans un ensemble fini ou dénombrable.

Exercice 4.1 *Un ensemble* X *est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une surjection de* $\mathbb{N}$ *vers* X

Proposition 4.3 $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

Démonstration :
Tout entier non nul se décompose de manière unique comme le produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2. L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,p) & \mapsto & (2p+1)2^m - 1 \end{array}$$

est donc une bijection.

Proposition 4.4 *Un produit cartésien fini d'ensemble finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.*

Par associativité du produit cartésien il suffit de démontrer le résultat pour deux ensembles finis ou dénombrables. Or chacun d'eux est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, on en déduit – en raisonnant coordonnée par coordonnée – que le produit cartésien est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}^2$, donc de $\mathbb{N}$ (d'après 4.3). Il est donc fini ou dénombrable d'après la proposition 4.1.

Exercice 4.2 *Montrer que* $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ *n'est pas dénombrable. Ceci justifie que dans le résultat précédent on se limite à un produit fini d'ensembles dénombrables.*

Exercice 4.3 *On numérote les éléments de* $\mathbb{N}^2$ *dans l'ordre* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)\ldots$

1) Faire un dessin pour visualiser le procédé de numérotation.

2) Expliquer sommairement pourquoi on obtient bien ainsi une bijection φ *de* $\mathbb{N}^2$ *vers* $\mathbb{N}$.

3) Déterminer $\varphi(p,q)$.

4) Expliciter $\varphi^{-1}(n)$.

Proposition 4.5 *Une réunion finie ou dénombrable d'ensemble finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.*

Démonstration :
Soit $(E_i)_{i\in I}$ la famille de ces ensembles, ψ une injection de I dans $\mathbb{N}$, et pour chaque une injection ψ_i de E_i dans $\mathbb{N}$. Ces injections existent d'après la proposition 4.2. Soit θ une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Soit x dans $E = \bigcap_{i\in I}$, il existe un i tel que x soit dans E_i, donc un k tel que x soit dans $E_{\psi(k)}$. Si on choisit le plus petit k, on définit une application $x \mapsto k(x)$ de E vers $\mathbb{N}$, telle que pour tout x de E $x \in E_{\psi(k(x))}$. Pour x dans E il existe un unique $m(x)$ tel que $x = \psi_{k(x)}(m(x))$. L'application $\tau : x \mapsto (k(x), m(x))$ est une injection de E dans $\mathbb{N}^2$ et $\theta \circ \tau$ est une injection de E dans $\mathbb{N}$.

E est fini ou dénombrable d'après la proposition 4.2.

Exercice 4.4 *Vérifier soigneusement que τ est une bijection.*

Proposition 4.6 *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

En effet $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$. $x \mapsto -x$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}^-$ qui est donc dénombrable. On applique alors la proposition 4.5.

Exercice 4.5 *Exhiber une bijection simple entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.*

Proposition 4.7 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Pour x de $\mathbb{Q}$ il existe un unique élément (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. On obtient ainsi une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ qui est dénombrable (comme produit fini d'ensembles dénombrables). Donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Proposition 4.8 *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Remarque 4.2 *La démonstration n'est pas exigible.*

Démonstration :
Vous avez vu en première année que tout nombre réel x admet un développement décimal propre, c'est-à-dire s'écrit de manière unique (Il serait bon de vous assurer que vous savez démontrer ce résultat)

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

avec
- $a_0 \in \mathbb{Z}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n \in \{0, \ldots, 9\}$,
- $\forall p \in \mathbb{N}^*\ \exists q\ q > p\ a_q \neq 9$.

Soit φ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ et pour p entier

$$\varphi(p) = a_{p,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{p,n}}{10^n}$$

le développement propre de $\varphi(p)$. Définissons x par

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

où $b_n = 1$ si $a_{n,n} \neq 1$, $b_n = 0$ si $a_{n,n} = 1$. x est bien donné par un développement propre et par construction $x \neq \varphi(p)$ pour tout p entier.

Ceci montre que φ n'est pas surjective. En particulier elle n'est pas bijective.

Exercice 4.6 *1) Montrer que le sous-ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{C}$ formé des nombres qui sont racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ – un tel nombre est dit algébrique – est dénombrable.*

Indication : Considérer l'ensemble E_p des racines des polynômes de degré au plus p et dont les coefficients sont envaleur absolue inférieurs à p ($p \in \mathbb{N}^*$).

2) En déduire qu'il existe des nombres complexes (et même réels) qui ne sont racine d'aucun polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ – un tel nombre est dit transcendant, e et π en sont des exemples – .

Exercice 4.7 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points où elle est discontinue est dénombrable.*

Indication : Considérer $E_p = \{x \in]a, b[, f(x + 0) - f(x - 0) > \frac{1}{p}\}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

4.2 Familles sommables

4.2.1 Familles sommables de nombres réels positifs

Dans cette section un certain nombre de résultats vont être énoncés. Dans certains le mot « **positifs** »apparaîtra en gras. Ceci veut dire que l'hypothèse de positivité est une hypothèse nécessaire à la proposition ou à la définition. Dans d'autres il ne sera pas en gras. Ce sont les résultats ou les définitions qui seront généralisés ensuite aux familles de nombres complexes. On aurait pu enlever le terme « positifs »de l'énoncé si cette positivité n'était pas utile dans la démonstration. Ils seront tous réénoncés dans le cadre des familles de nombres complexes. Retenez bien que tous les énoncés où « **positifs** »est en gras ne peuvent être utilisés qu'une fois vérifiée la positivité des termes de la famille concernée.

Définition 4.2 *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels* **positifs***, indexée par un ensemble dénombrable est sommable si et seulement si il existe un réel M tel que pour toute partie finie J contenue dans I on a $\sum_{j\in J} u_j \leq M$.*

Dans ce cas sa somme est le nombre, noté $\sum_{i\in I} u_i$, égal à :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathcal{F}} \sum_{j\in J} u_j,$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de I.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels **positifs** *n'est pas sommable, alors $\sup_{J\in\mathcal{F}} \sum_{j\in J} u_j = +\infty$, on prendra par convention*[1]

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty.$$

Remarque 4.3 *Cette définition de la sommabilité n'est pas très heureuse. Elle ne dit rien de la sommabilité d'une famille finie. On aurait au moins du autoriser I fini ou dénombrable. Dans ce cas toute famille finie est sommable et sa somme est sa somme usuelle et la définition devient une extension de la notion de somme finie. De plus dans les démonstrations qui vont suivre la dénombrabilité de I ne sert à rien. La bonne définition est donc la même en enlevant l'hypothèse I dénombrable. On verra ultérieurement que cette extension possède toutes les propriétés d'associativité et de commutativité auxquelles on pourrait s'attendre.*

Exercice 4.8 *Montrer que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable (au sens étendu) de réels positifs alors $\{i, u_i \neq 0\}$ est fini ou dénombrable. Ceci montrer que la convention du programme est suffisante pour*

1. Cette convention sera très utile en probabilités.

démontrer tout résultat pour les familles sommables au sens général. Mais elle crée d'inutiles complications dans la rédaction.

Proposition 4.9 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels* **positifs** *est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. On a alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 4.10 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels* **positifs**. *On suppose*
- *La famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable,*
- *$\forall i \in I\ u_i \leq v_i$.*

Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et de plus :

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

Cette proposition est particulièrement importante. Vous en avez vu l'équivalent pour les séries à termes positifs en première année, on en retrouvera l'équivalent dans l'étude des fonctions continues intégrables. Je vous recommande d'en intégrer le concept et d'en digérer la substantifique moelle !

Proposition 4.11 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs alors $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

Théorème 4.1 (Théorème de sommation par paquets) *Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels* **positifs**, *alors cette famille est sommable si et seulement si :*
- *Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable,*
- *La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big)$ converge.*

Dans ce cas on aura :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big)$$

Remarque 4.4 *La démonstration de ce théorème est hors programme. On en trouvera néanmoins une démonstration dans un cadre plus général que celui du programme dans le cadre du théorème 4.2.*

Remarque 4.5 *Une nouvelle fois cet énoncé ne me satisfait pas. Il ne contient pas le cas où on désirerait partitionner I en un nombre fini de parties, sauf si on autotise certains éléments d'une partition à être vides. Ce n'est pas la définition usuelle d'une partition mais cette conception est bien utile en probabilités lorsqu'on définit un système complets d'évènements. C'est un cas particulier du théorème suivant, dont l'énoncé est aussi facile à comprendre, il s'agit de la généralisation de l'associativité dans un groupe commutatif, et dont la démonstration n'est pas plus compliquée.*

Théorème 4.2 (Théorème de sommation par paquets) *Si $(I_\lambda)_{i\in\Lambda}$ est une partition de I, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels* **positifs**, *alors cette famille est sommable si et seulement si :*
- *Pour tout λ de Λ la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable,*
- *La famille $\displaystyle(\sum_{i\in I_\lambda} u_i)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.*

Dans ce cas on aura :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\Big)$$

Démonstration :

- On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable.
  - Pour tout λ et tout J fini contenu dans I_λ on a

    $$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i, \text{ indépendant de } J.$$

    Donc $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable.
  - Soit L un sous-ensemble fini de Λ. Pour toute famille $(J_\ell)_{\ell\in L}$ de sous-ensemble finis des I_ℓ, $\ell \in L$ on aura

    $$\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in J_\ell} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

    En passant à la borne supérieure sur les $(J_\ell)_{\ell\in L}$ qui sont mutuellement indépendants :

    $$\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

    Ceci prouve que $(\sum_{i\in I_\lambda} u_i)_{\lambda in\Lambda}$ est sommable et que :

    $$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

- Réciproquement.
  Soit J une partie finie contenue dans I, alors il existe une partie finie L contenue dans Λ et une famille $(J_\ell)_{\ell\in L}$ de sous ensemble finis des $(I_\ell)_{\ell\in L}$ telle que $J = \bigcap_{\ell\in L} J_\ell$. Alors

  $$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in J_\ell} u_i \leq \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} u_i \leq \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i.$$

  Donc $(u_i)_i \in I$ est sommable et

  $$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i.$$

Si $(u_i)_{i\in I}$ sommable alors $(\sum_{i\in I_\lambda} u_i)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i,$$

puis $(u_i)_i \in I$ est sommable (on le savait déjà) et

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i,$$

donc

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in I_\lambda} u_i.$$

Le même raisonnement s'applique dans l'autre cas.

4.2.2 Familles sommables de nombres complexes

Définition 4.3 *Une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable est sommable si et seulement la famille* $(|u_i|)_{i\in I}$ *est sommable.*

Remarque 4.6 *Comme dans le cas des familles de réels positifs, cette définition s'étend à un ensemble quelconque, en particulier fini.*

On rappelle la définition

Définition 4.4 *Si* x *est un réel la partie positive de* x *est* $x^+ = \max(x, 0)$ *et sa partie négative est* $x^- = \max(-x, 0)$*. On a* $x = x^+ - x^-$ *et* $|x| = x^+ + x^-$*.*

Proposition 4.12 *Une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels est sommable si et seulement les familles* $(u_i^+)_{i\in I}$ *et* $(u_i^-)_{i\in I}$ *sont sommables. On définit alors la somme de la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *par :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Justification :

- On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable, donc $(|u_i|)_{i\in I}$ sommable. Pour tout i $u_i^+ \leq |u_i|$ (resp. $u_i^- \leq |u_i|$). Il résulte de la proposition 4.10 que $(u_i^+)_{i\in I}$ (resp. $(u_i^+)_{i\in I}$) est sommable
- Réciproquement si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^+)_{i\in I}$ sont sommable, alors, puis que $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$, la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable d'après la proposition 4.11.

Proposition 4.13 *Une famille* $(u_j)_{j\in I}$ *de nombres complexes est sommable si et seulement les familles* $(\mathcal{R}\mathrm{e}(u_j))_{j\in I}$ *et* $(\mathcal{I}\mathrm{m}(u_j))_{j\in I}$ *sont sommables. On définit alors la somme de la famille* $(u_j)_{j\in I}$ *par :*

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathcal{R}\mathrm{e}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathcal{I}\mathrm{m}(u_j).$$

Remarque 4.7 *On a du, à regret, abandonner le* i *en indice, pour éviter la confusion avec* $i = \sqrt{-1}$*.*

Proposition 4.14 *L'ensemble des famille sommables de nombres complexes indexées par l'ensemble* I *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^I$*. On le note* $\ell_1(I)$*.*
L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \ell_1(I) & \to & \mathbb{C} \\ & & (u_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} u_i \end{array}$$

est linéaire.

Remarque 4.8 *On pourrait énoncer un théorème similaire pour les familles de nombres réels.*

Théorème 4.3 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente. On a alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Théorème 4.4 *Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels ou complexes est sommable et si $\sigma : I \to I$ est une permutation des éléments de I, c'est-à-dire une bijection de I sur lui-même, alors la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Remarque 4.9 *Démonstration non exigible.*

Théorème 4.5 (Théorème de sommation par paquets) *Si $(I_\lambda)_{i\in\Lambda}$ est une partition de I, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou de complexes alors :*

- *Pour tout λ de Λ la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable,*
- *La famille $(\sum_{i\in I_\lambda} u_i)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.*

et on a :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\Big)$$

Remarque 4.10 *Ce théorème est très similaire à celui qui concerne les familles de réels positifs. Dans la pratique, il faudra appliquer tout d'abord le théorème sur les familles de réels positifs à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ pour obtenir la sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$, puis le théorème sur les familles de nombres réels ou complexes pour sommer la famille $(u_i)_{i\in I}$ par paquets. Il sera courant que les partitions de I utilisées dans les applications de ces théorèmes ne soient pas les mêmes ; telle partition étant plus adaptée pour justifier la sommabilité, et telle autre plus adaptée à la sommation. On en verra un exemple dans la sommabilité des suites doubles.*

4.3 Application des familles sommables

Théorème 4.6 *Une famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ (on parle aussi de suite double) de réels* **positifs***est sommable si et seulement si :*

- *Pour tout n entier la série $\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ converge,*
- *la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*

Dans ce cas :

- *Pour tout m entier la série $\sum_{n\geq 0} a_{m,n}$ converge,*
- *la série $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*

et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Théorème 4.7 *Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres réels ou complexes est sommable alors :*

- *Pour tout n entier la série $\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ converge,*
- *la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*
- *Pour tout m entier la série $\sum_{n\geq 0} a_{m,n}$ converge,*
- *la série $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*

et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Remarque 4.11 *Encore une fois ce théorème sera utilisé après avoir utilisé celui sur les familles de réels positifs pour assurer la sommabilité de* $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *et donc celle de* $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.
Remarquons que la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable si et seulement si la famille* $(a_{n,m})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable, car* $\sigma : (m,n) \mapsto (n,m)$ *est une permutation de* $\mathbb{N}^2$*. Donc pour assurer la sommabilité de* $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$*, il peut être intéressant de permuter les rôles de* m *et* n.

Définition 4.5 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries de nombres complexes. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *avec*

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p = \sum_{0\leq p,q\leq n, p+q=n} u_p v_q.$$

Théorème 4.8 *Si les deux séries de nombres complexes* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont absolument convergentes il en est de même de leur produit de Cauchy. Celui-ci est par conséquent convergent et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$