

Chapitre 11

Réduction des endomorphismes

11.1 Sous-espaces stables

11.1.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

11.1.1.1 Stabilité

Définition 11.1 Soit u un endomorphisme de $L(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si : $u(F) \subset F$.

Exemple : toute intersection de sous-espaces stables par u est un sous-espace stable par u . En particulier étant donné une partie S il existe une plus petite partie stable par u et contenant S . Par exemple il existe un plus petit sous-espace stable par u contenant un vecteur x donné. On montrerait que c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{u^k(x); k \in \mathbb{N}\}$.

Définition 11.2 Si F est un sous-espace stable par u , l'endomorphisme de F $\tilde{u}_F : x \mapsto u(x)$ s'appelle l'endomorphisme induit par u sur F .

Remarque : ne pas confondre l'endomorphisme induit et la restriction

11.1.1.2 Si u et v commutent $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v

Si u est un endomorphisme on vérifie aisément que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par u . On a un résultat plus général :

Théorème 11.1 Soient u et v deux éléments de $L(E)$. On suppose que u et v commutent. Dans ces conditions $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .

Remarque : La réciproque est fautive $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ peuvent être stables par v , sans que u et v ne commutent.

11.1.1.3 Caractérisation matricielle

Proposition 11.1 Soit F un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie, G un supplémentaire de F et \mathcal{B} une base adaptée à cette décomposition. Alors F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée de taille $\dim F$ (C est alors une matrice carrée de taille $\dim G$).

De même G sera stable si et seulement si le matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas A est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F . La matrice

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

est la matrice de la restriction de u à G (dans des bases naturelles), et finalement C est la matrice de la $\pi \circ u|_F$ où π est la projection sur G parallèlement à F . On a un résultat similaire dans le deuxième cas.

Proposition 11.2 *Le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

est égal à $\det A \det C$. Ce résultat peut s'étendre à une matrice triangulaire par blocs, et en particulier diagonale par blocs.

Proposition 11.3 *Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus E_i$. Soit B une base de E une base adaptée à cette décomposition. Un endomorphisme u de $L(E)$ laisse stable chacun des sous-espaces E_i si et seulement si sa matrice dans la base B est diagonale par blocs, c'est à dire de la forme :*

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix},$$

où chaque M_i est une matrice carrée dont la taille est égale à la dimension de E_i . De plus M_i est alors la matrice dans la partie de B qui est la base de E_i de l'endomorphisme induit par u sur E_i .

Proposition 11.4 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . La matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un endomorphisme u de E est diagonale si et seulement si u laisse globalement invariante chacune des droites engendrées par les e_i .*

Proposition 11.5 *Avec les notations de la question précédente, la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un endomorphisme u de E est triangulaire supérieure si et seulement si chaque sous-espace $F_i = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ est stable par u .*

11.1.2 Polynômes d'un endomorphisme

11.1.2.1 $\mathbb{K}[u]$

Théorème 11.2 *Soit u un élément de $L(E)$. Il existe un unique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ vers $L(E)$ qui envoie X sur u . L'image de P par ce morphisme se note $P(u)$. L'image de $\mathbb{K}[X]$ par ce morphisme se note $\mathbb{K}[u]$. C'est la plus petite sous-algèbre de $L(E)$ contenant u . Elle est commutative. Le noyau de ce morphisme est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ qui s'appelle l'idéal des polynômes annulateurs de u . Si cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$ il est engendré par un unique polynôme unitaire qu'on appelle le polynôme minimal de u . Si E est de dimension finie tout endomorphisme possède un polynôme minimal.*

Proposition 11.6 *Si u et v commutent, il en est de même de $P(u)$ et v , pour tout polynôme P . En particulier $\text{Im } P(u)$ et $\text{Ker } P(u)$ sont stables par v .*

11.1.2.2 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 11.3 *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$. Soit u un endomorphisme de $L(E)$. Alors :*

$$\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

Théorème 11.4 *Soient (P_1, \dots, P_n) des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux, soit u un endomorphisme de $L(E)$, alors :*

$$\text{Ker } P_1 P_2 \dots P_n(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_n(u).$$

11.2 Réduction d'un endomorphisme

11.2.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 11.3 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$ on dit que λ est valeur propre de u si $u - \lambda Id_E$ n'est pas injectif, c'est à dire si $\text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.*

Proposition 11.7 Soit $u \in L(E)$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible.

Proposition 11.8 Soit $u \in L(E)$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda Id_E) = 0$.

Définition 11.4 L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u s'appelle son spectre, noté $\text{Sp}(u)$.

Définition 11.5 Soit λ une valeur propre de u , on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace $\text{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

Définition 11.6 Si $u \in L(E)$, on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ tout x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$. Tout vecteur propre engendre une droite stable par u . Réciproquement toute droite stable par u est engendrée par un vecteur propre.

Proposition 11.9 Si x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , alors il est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Corollaire 11.1 Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de u est racine de P .

Théorème 11.5 Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont p valeurs propres distinctes de $u \in L(E)$ les sous-espaces propres associés sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

Proposition 11.10 Si F est un sous-espace stable par u et si \tilde{u}_F est l'endomorphisme induit par u sur F , alors toute valeur propre λ de \tilde{u}_F est valeur propre de u et $F_\lambda(\tilde{u}_F) = F \cap E_\lambda(u)$.

Proposition 11.11 Soit a un automorphisme de E , alors l'application $u \mapsto aua^{-1}$ est un automorphisme de $L(E)$. u et aua^{-1} ont même valeurs propres, de plus $E_\lambda(aua^{-1}) = a(E_\lambda(u))$.

11.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Définition 11.7 Soit M une matrice de $M_n(K)$, on appelle valeur propre de M tout élément λ de \mathbb{K} tel que $M - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.

Définition 11.8 A toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ on peut associer un endomorphisme de \mathbb{K}^n vers \mathbb{K}^n par $X \mapsto MX$, en identifiant \mathbb{K}^n avec $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et cette application est un isomorphisme de l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ vers $L(\mathbb{K}^n)$.

Proposition 11.12 λ est valeur propre de M si et seulement si λ est valeur propre de l'endomorphisme associé.

Définition 11.9 On dit qu'un vecteur colonne X de \mathbb{K}^n est vecteur propre de la matrice M pour la valeur propre λ si $MX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

Remarque : X est donc vecteur propre de M si et seulement si c'est un vecteur propre de l'endomorphisme associé à M .

Définition 11.10 Si λ est valeur propre de M , $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X; MX = \lambda X\}$ est une sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n qui s'appelle le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ .

Proposition 11.13 Tout élément de M de $M_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$. La spectre de M dans \mathbb{R} est alors contenu dans le spectre de M dans \mathbb{C} .

Proposition 11.14 Soit P dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$. M et PMP^{-1} ont même valeurs propres, de plus $E_\lambda(PMP^{-1}) = P(E_\lambda(M))$.

Deux matrices semblables ont donc même spectre, on verra qu'on peut être plus précis plus tard.

11.2.3 Polynôme caractéristique

Définition 11.11 On appelle polynôme caractéristique d'une matrice M le polynôme $P_M(X) = \det(M - XI_n)$.

Exercice 1: Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice de $M_n(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra éventuellement supposer que les s_i sont non-nuls, ce qui n'est pas nécessaire.

Théorème 11.6 *Si u est un endomorphisme de $L(E)$, on appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base quelconque. (Si \mathbb{K} est infini) C'est l'unique polynôme $P_u(X)$ tel que $P_u(\lambda) = \det(u - \lambda Id_E)$ pour tout λ de \mathbb{K} .*

Coefficients faciles à déterminer du polynôme caractéristique.

Proposition 11.15 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique. Si E est somme directe d'une famille de sous-espaces stables, le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes induits.*

Corollaire 11.2 *La dimension d'un sous-espace propre est toujours inférieure à la multiplicité de la valeur propre associée.*

Proposition 11.16 *Les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice sont les racines dans \mathbb{K} de son polynôme caractéristique.*

Définition 11.12 *Si $u \in L(E)$ et si λ est une valeur propre de u , on appelle multiplicité de λ comme valeur propre de u la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique. La définition est similaire pour une matrice.*

Proposition 11.17 *Lorsque le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme est scindé, la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, et le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité.*

Corollaire 11.3 *Si le corps de base est \mathbb{C} et si la dimension de E est au moins 1, tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.*

11.2.3.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley¹-Hamilton² qui suit, est un théorème clé pour la réduction des endomorphismes.

Théorème 11.7 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$, on a $P_u(u) = 0$.*

Un énoncé équivalent affirme simplement que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique. Soit \mathcal{B} une base de E et M la matrice de u dans cette base. Puis que l'application $v \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme d'algèbre de $L(E)$ vers $M_n(\mathbb{K})$ il suffit de prouver que $P_u(M) = 0$, où 0 désigne la matrice nulle. On rappelle aussi que $P_u(X) = \det(M - XI_n)$.

On se place dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$ dont l'ensemble des matrices à coefficients dans $K[X]$ est un sous-anneau, noté $M_n(\mathbb{K}[X])$.

En identifiant chacun de ses coefficients on vérifie facilement que toute matrice A de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont chaque coefficient est un polynôme de degré au plus d se décompose de manière unique sous la forme

$$A = A_0 + X A_1 + \cdots + X^d A_d,$$

où les A_i sont dans $M_n(k)$.

On rappelle aussi que pour toute matrice A de $M_n(k)$ où k est un corps commutatif on a la relation

$$A {}^t\text{Com}(A) = \det(A) I_n.$$

1. CAYLEY Arthur, Richmond 1821 - Cambridge 1895

2. HAMILTON William, Dublin 1805 - Dublin 1865

Prenons $A = M - XI_n$, si $B = {}^t\text{Com}(A)$ B est une matrice de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $n - 1$. On peut donc écrire

$$B = B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}$$

et d'après la relation sur la comatrice on aura

$$(M - XI_n)(B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}) = \det(M - XI_n)I_n.$$

Effectuons le produit dans le membre de gauche, et écrivons

$$\det(M - XI_n) = a_0 + \cdots + a_n X^n$$

dans le membre de droite. On obtient

$$MB_0 + X(MB_1 - B_0) + \cdots + M^k(MB_k - B_{k-1}) + \cdots - X^n B_{n-1} = a_0 I_n + X a_1 I_n + \cdots + X^n a_n I_n.$$

Par unicité de la décomposition on peut affirmer :

$$\begin{aligned} MB_0 &= a_0 I_n \\ MB_1 - B_0 &= a_1 I_n \\ \dots & \\ MB_k - B_{k-1} &= a_k I_n \\ \dots & \\ MB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= a_n I_n \end{aligned}$$

En multipliant la i -ème ligne par M^{i-1} puis en sommant on obtient

$$MB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (M^k B_k - M^{k-1} B_{k-1}) - M^{n-1} B_{n-1} = a_0 I_n + \cdots + a_k M^k + \cdots + a_n M^n.$$

C'est-à-dire :

$$O = P_u(M).$$

11.2.4 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

11.2.4.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 11.13 Soit $u \in L(E)$, u est dit diagonalisable s'il existe une base formée de vecteurs propres de u . La matrice de u dans cette base est alors diagonale.

Théorème 11.8 L'endomorphisme u de $L(E)$, est diagonalisable si et seulement si E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u .

On a déjà vu que la somme de sous-espaces associés à des valeurs propres distinctes était directe. La somme des sous-espaces propres est clairement le sous-espace engendré par l'ensemble des vecteurs propres.

Si u est diagonalisable, on peut à l'aide des vecteurs propres construire une base de E , donc le sous-espace engendré par les vecteurs propres est E .

Réciproquement si E est la somme des sous-espaces propres alors il est engendré par l'ensemble des vecteurs propres et on peut donc construire à partir de cet ensemble une base de vecteurs propres. Donc u est diagonalisable.

Théorème 11.9 Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples alors u est diagonalisable.

Si n est la dimension de l'espace E alors u possède n sous-espaces propres, qui sont de dimension au moins égale à 1. La dimension de leur somme est au moins n . Cette somme est donc égale à E . par conséquent u est diagonalisable. On remarquera que dans ce cas la dimension de chaque sous-espace propre est automatiquement exactement égale à 1.

Remarque : Cette condition n'est pas nécessaire. On peut par exemple considérer le cas de l'application nulle.

Théorème 11.10 Une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable est que u soit annulé par un polynôme scindé sur \mathbb{K} dont toutes les racines sont simples.

Supposons que u soit diagonalisable. E est alors la somme des sous-espaces propres $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$. Or les $(X - \lambda)$ sont deux à deux premiers entre eux on peut donc appliquer le théorème de décomposition des noyaux et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker} \left[\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda) \right] (u).$$

u est bien annulé par le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ qui est scindé à racines simples.

Réciproquement, supposons que u soit annulé par le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{\mu \in Z} (X - \mu)$. D'après le théorème de décomposition des noyaux on pourra écrire

$$E = \bigoplus_{\mu \in Z} \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E).$$

On ne peut retenir dans cette somme que les μ pour lesquels $\text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire les μ qui sont valeurs propres de u . L'égalité précédente devient

$$E = \bigoplus_{\mu \in Z \cap \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E).$$

E sera donc la somme des sous-espaces propres et par conséquent u est diagonalisable.

Bien que pratiquement peu utile, un autre énoncé de ce théorème serait : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Théorème 11.11 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, alors u est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé toute valeur propre est égale sa multiplicité.*

D'après ce qui a précédé u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (condition nécessaire) et chaque $\bigoplus E_{\lambda_k} = E$.

Théorème 11.12 *Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (ou inférieure). Les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Corollaire 11.4 *Si u est endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.*

Corollaire 11.5 *Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie au moins égale à un, tout endomorphisme de E possède au moins un vecteur propre.*

Définition 11.14 *Une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si son endomorphisme associé est diagonalisable, c'est-à-dire ssi elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 11.13 *On a les mêmes conditions suffisantes de diagonalisation, ainsi que les mêmes conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation que dans le cas des endomorphismes en utilisant l'isomorphisme d'algèbres entre $M_n(\mathbb{K})$ et $L(\mathbb{K}^n)$.*

Théorème 11.14 *Soit M une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{K})$, soit $B = (C_1, \dots, C_n)$ une base de \mathbb{K}^n formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres, non nécessairement distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de M . Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les C_i , c'est à dire la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{K}^n à la base B . Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i , alors on peut écrire : $M = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}MP$.*

Application au calcul de la puissance d'une matrice : Soit M une matrice diagonalisable. On garde les notations du théorème précédent. Alors si n est un entier : $M^n = PD^nP^{-1}$.

Lemme 11.1 *Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$, l'application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $M_n(\mathbb{K})$ qui à X associe PXP^{-1} est un isomorphisme d'algèbre, continu car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.*

Application au calcul de l'exponentielle d'une matrice : Avec les notations précédentes, la série, dans $M_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(M) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} M^p$$

est absolument convergente et donc convergente. Sa somme vaut $P \exp(D) P^{-1}$, et $\exp(D)$ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les exponentielles des termes diagonaux de D .

On peut étendre aussi la trigonalisation.

Définition 11.15 Une matrice est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire si et seulement si elle est la matrice d'un endomorphisme trigonalisable.

Théorème 11.15 Soit M une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} alors il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ sont alors les valeurs propres de M comptées avec leur ordre de multiplicité.

Remarque : Ce théorème pourrait être énoncé avec des matrices triangulaires inférieures.

Corollaire 11.6 Dans $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Corollaire 11.7 Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres et son déterminant au produit des valeurs propres. Il en est de même pour un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe.

Remarque : Toute matrice à coefficients réels pouvant être interprétée comme une matrice à coefficients complexes le résultat précédent reste valable à condition de compter aussi les valeurs propres complexes.

11.3 Compléments

11.3.1 Sous-espaces caractéristiques

11.3.2 Décomposition $D + N$

Théorème 11.16 Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice $D + N$ où D est diagonale, N nilpotente et $DN = ND$.

Théorème 11.17 Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose de manière unique sous la forme $u = d + n$ où d est diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$.

De plus d et u sont des polynômes en u .