Chapitre 13

Espaces préhilbertiens et euclidiens

13.1 Espaces préhilbertiens

13.1.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E, est une forme bilinéaire symétrique définie et positive sur E. Elle associe à un couple (x, y) de vecteurs un nombre réel noté $(x|y)$, $x.y$, $< x, y >$ et parfois même par une notation moins courante dès lors que plusieurs formes bilinéaires coexistent sur l'espace E.
Exemples : Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, sur les espaces de suites $l^2(\mathbb{N})$ et $l^2(\mathbb{Z})$, sur les espaces de fonctions continues $L^2(I)$, cas d'un poids.

Définition 13.1 *Un espace préhilbertien*[1] *réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.*

13.1.2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii.

L'inégalité de Cauchy[2]-Schwarz[3]-Bunyakovski[4] se décline en deux modèles, le modèle reél et le modèle complexe.

Théorème 13.1 *Si E est un espace préhibertien réel :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

Il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.
Si $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, on peut établir l'inégalité triangulaire (dite inégalité de Minkowsky[5]) :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L'égalité est équivalente à $x = 0$ ou il exite un réel t positif tel que $y = tx$.
On vérifie facilement que $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur E. Tout espace préhibertien est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel normé.
Un espace préhilbertien complet s'appelle un espace de Hilbert.

1. David Hilbert, allemand (Königsberg 1862-Göttingen 1943)
2. Baron Augustin Louis Cauchy, français (Paris 1789–Sceaux 1857)
3. Hermann Amandus Schwarz, allemand(Hermsdorf unter Kynast 1843–Berlin 1921)
4. Victor Iakovlevitch Bunyakovskii, russe (Baré 1804–Saint-Pétersbourg 1889)
5. Hermann Minkowsky, allemand,(Aleksotas (Lituanie) 1864- Göttingen 1909)

13.1.2.1 Polarisation

Dans un espace préhibertion la donnée de la norme est équivalente à la donnée du produit scalaire. Dans le cas d'un espace préhilbertien réel

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2.$$

On en déduit l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

13.1.3 Orthogonalité

13.1.3.1 Vecteurs unitaires

13.1.3.2 Vecteurs orthogonaux

13.1.3.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 13.2 *Deux sous-espaces sont orthogonaux si et seulement si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.*

Proposition 13.1 *Toutes famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux est en somme directe.*

13.1.3.4 Orthogonal F^o ou $F^\perp$

Définition 13.3 *L'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur d'un F est un sous-espace vectoriel. On l'appelle l'orthogonal de F et on le note F^o ou $F^\perp$.*

Proposition 13.2 *Tout sous-espace est en somme directe avec son orthogonal (mais la somme n'est pas nécessairement l'espace tout entier).*

Par exemple deux sous-espaces sont orthogonaux si et seulement l'un d'entre eux est contenu dans l'orthogonal de l'autre.

13.1.3.5 Familles orthogonales, familles orthonormales

13.1.3.6 Relation de Pythagore pour n vecteurs

Si deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont orthogonaux, on a la très célèbre relation de Pythagore[6] :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

La réciproque est vraie.
Dans tout espace préhilbertien on peut étendre cette relation à la somme d'une famille orthogonale de vecteurs.

6. Pythagore, grec (Samos -569 – Samos -500)

13.1.3.7 Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux

Définition 13.4 *Deux sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si ils sont supplémentaires et orthogonaux.*

Définition 13.5 *On dit qu'un projecteur est orthogonal si sont noyau et son image sont orthogonaux.*

Ce sont dans ce cas des sous-espaces supplémentaires orthogonaux.
Si p est un projecteur orthogonal pour tout x de E on a :$\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2$.
Exercice : La réciproque est-elle vraie ?
Exercice : Montrer que le projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p\| \leq 1$.
Exercice : Si p et q sont deux projecteurs tels que $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2\|q(x)\|^2$ pour tout x de E, alors ils sont orthogonaux et $\mathrm{Id}_E = p + q$.

13.1.3.8 Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Projecteurs orthogonaux associés

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux. Il sont en somme directe. Leur somme s'appelle une somme directe orthogonale. Si elle est égale à E on peut définir pour tout i un projecteur sur E_i parallèlement à la somme des autres. C'est un projecteur orthogonal et $\mathrm{Id}_E = p_1 + \cdots + p_n$.
Exercice. Montrer que dans ce cas $\|x\|^2 = \|p_1(x)\|^2 + \cdots + \|p_n(x)\|^2$ pour tout x de E. Etudier la réciproque.

13.2 Espaces euclidiens

Définition 13.6 *Un espace euclidien*[7] *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

13.2.1 Bases orthonormales

13.2.1.1 Existence de bases orthonormales

On démontre l'existence de base othonormales à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt [8], qui est constructif.

Théorème 13.2 *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre dans un espace préhilbertien E, alors il existe une famille libre $(V_1, \ldots, V_n)$ de E telle que pour tout i $V_i \in \mathrm{Vect}\{(v_1, \ldots, v_i)\}$.*

Cette famille est essentiellement unique. Si $(V_1', \ldots, V_n')$ vérifie la même propriété, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ in $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout i : $V_i' = \lambda_i V_i$, de plus $|\lambda_i| = 1$.
De plus pour tout i $\mathrm{Vect}\{(V_1, \ldots, V_i)\} = \mathrm{Vect}\{(v_1, \ldots, v_i)\}$

Un exemple classique : Orthogonalisation d'une famille de polynôme.
La forme bilinéaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrons qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes unitaires [9] vérifiant :

$$\forall n \quad \deg P_n = n \qquad \forall n \neq m \ (P_n|P_m) = 0.$$

7. Euclide : -330 - -275, grec
8. Schmidt Erhard,allemand (Derpt (Estonie) 1876–Berlin 1959)
9. L'appellation “unitaire", dans le contexte ou nous nous trouvons peut désigner deux propriétés du polynôme. Celle d'avoir son coefficient dominant égal à 1, et celle d'avoir une norme égale à 1. Ces propriétés sont rarement compatibles. Pour éviter toute ambiguïté, on peut dire d'un polynôme dont le coefficient dominant est 1, qu'il est normalisé.

En effet nécéssairement $P_0 = 1$. Supposons $(P_0, \ldots, P_n)$ construite vérifiant les propriété voulues, il suffit de prouver qu'il existe un et un seul polynôme P_{n+1} unitaire, vérifiant

$$\deg P_{n+1} = n + 1, \quad \forall m \leq n \ (P_n, P_m).$$

Or un polynôme unitaire de degré $n+1$ s'écrit de manière unique $X^{n+1} + Q$, où Q est de degré au plus n, soit puisque $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme P unitaire de degré $n+1$ s'écrit

$$X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k P_k.$$

Les conditions $(P_m|P) = 0$, $0 \leq m \leq n$, déterminent bien un unique P, qui est P_{n+1}, donné par

$$P_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k|X^{n+1})}{(P_k|P_k)} P_k.$$

Soit $Q_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$. On montre facilement que Q_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $(-1)^n$ et qui vérifie si $m < n$:

$$\begin{aligned}
(Q_m|Q_n) &= \int_0^{+\infty} Q_m(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} Q_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx \\
&= (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k} Q_m(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(x^n e^{-x}\right) dx \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} Q_m(x) \left(x^n e^{-x}\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par unicité de la suite (P_n), on en déduit pour tout n, $P_n = (-1)^n Q_n$.
Remarquons que

$$\begin{aligned}
(Q_n|Q_n) &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} Q_n(x) \left(x^n e^{-x}\right) dx \\
&= n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = (n!)^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\|P_n\| = \frac{1}{n!}$.

Proposition 13.3 *Dans tout espace euclidien il existe une base orthonormale.*

13.2.1.2 Complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale

On sait déjà que dans un espace vectoriel de dimension finie toute famille libre peut être complétée en une base. Dans un espace euclidien on a le résultat plus précis :

Proposition 13.4 *Toute famille orthonormale formée de vecteurs non nuls est libre et peut être complétée en une base orthonormale.*

Proposition 13.5 *Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base othonormale d'un espace euclidien E. Soit $x=\sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y=\sum_{k=1}^n y_k e_k$ deux éléments quelconques de E. On a :*

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^n x_k^2,\quad (x|y)=\sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

En fait pour tout k $x_k=(e_k|x)$, donc

$$x=\sum_{k=1}^n (e_k|x)e_k \quad \|x\|^2=\sum_{k=1}^n (e_k|x)^2,\quad (x|y)=\sum_{k=1}^n (e_k|x)(e_k|y).$$

13.2.2 Projections orthogonales

Dans un espace préhibertien réel, de dimension finie ou non, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace. On l'appelle le supplémentaire orthogonal.
La projection orthogonale de E sur F est la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Notons la p_F.
Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F, alors

$$p_F(x)=\sum_{k=1}^p (e_k|x)e_k.$$

Si la base est seulement orthogonale alors

$$p_F(x)=\sum_{k=1}^p \frac{(e_k|x)}{(e_k|e_k)}e_k.$$

Soit F un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien réel, par exemple un sous-espace d'un espace euclidien. Soit x un élement de E, on rappele que la distance de x à F est la borne inférieure des distances de x aux éléments de F :

$$\mathrm{d}(x,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|.$$

Dans un espace préhibertien réel la distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie est atteinte en un unique élément qui est la projection orthogonale de vecteur sur la sous-espace. Avec les notations du paragraphe précédent :

$$\forall y\in F-\{p_F(x)\}\quad \|x-y\|>\|x-p_F(x)\|=\mathrm{d}(x,F),$$

$$\|x\|^2=\|p_F(x)\|^2+\mathrm{d}^2(x,F).$$

Un corollaire de la dernière égalité est l'inégalité, dite de Bessel [10]. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthonormale et x un élément de E, alors :

$$\sum_{k=1}^n (e_k,x)^2\le\|x\|^2.$$

Exemple 1 : déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(1-ax-bx^2)^2\,dx$.
Exemple 2 : la droite de régression.

10. Bessel Friedrich Wilhelm (1784 Minden –1846 Königsberg) astronome allemand, le premier à avoir effectué, en 1838, la mesure précise de l'éloignement d'une étoile. Connu aussi pour les fonctions de Bessel.

13.2.2.1 Complément : Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert

13.2.2.2 Complément : Expression de la distance à un sous-espace à l'aide des déterminants de Gram

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs d'un espace préhibertien on appelle déterminant de Gram [11] de cette famille le déterminant

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left| ((x_i|x_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \right|.$$

13.2.3 Adjoint d'un endomorphisme

Cette partie n'est plus au programme.

13.2.3.1 Existence de l'adjoint

Théorème 13.3 *L'application $x \mapsto (y \mapsto (x|y))$ est un isomorphisme de tout espace euclidien sur son dual.*

Théorème 13.4 *Si u est un endomorphisme de l'espace euclidien E, il existe un unique endomorphisme, noté u^* telle que :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Cet endomorphisme s'appelle l'adjoint de u.

Proposition 13.6 *L'application $u \mapsto u^*$ est un anti-automorphisme involutif de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 13.7 *On a les relations :*

$$\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\circ \quad \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\circ.$$

Il en résulte en particulier que u et u^* ont même rang.

Proposition 13.8 *Un sous-espace est stable par u si et seulement si sont orthogonal est stable par u^*.*

13.2.3.2 Interprétation matricielle

La matrice de u^* dans une base orthonormale est la transposée de la matrice de u dans cette même base. En particulier u et u^* ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. Mais ils n'ont pas du tout les mêmes sous-espaces propres.
Exercice : Montrer que u^* est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Application à la recherche des sous-espaces stables d'un espace de dimension 3. Recherchons les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Gram Jørgan Pedersen, danois (Nastrup 1850– Copenhague 1916)

13.2.4 Groupe orthogonal

13.2.5 Endomorphismes orthogonaux

13.2.5.1 Endomorphismes orthogonaux

Définition 13.7 *En endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*
i) $\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
ii) $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.
iii) $u^*\, u = \mathrm{Id}_E$.
iv) $u\, u^* = \mathrm{Id}_E$.
v) *u est inversible et* $u^* = u^{-1}$.

Les trois dernières conditions ne sont plus au programme.
Exemple d'endomorphisme orthogonal : la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Cas particuler la réflexion, symétrie par rapport à un hyperplan.
Exemples des réflexions échangeant deux vecteurs ; interprétation géométrique : réflexions échangeant deux droites.

13.2.5.2 Groupe orthogonal

Proposition 13.9 *L'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe de $GL(E)$, noté $O(E)$. On l'appelle le groupe orthogonal.*

13.2.5.3 Rotations, groupe spécial orthogonal

Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1. Les endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 s'appelle les rotations. Dans un espace de dimension 3 ce sont les rotations au sens usuel du terme.

Proposition 13.10 *L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 est un sous-groupe de $O(E)$, noté $SO(E)$. On l'appelle le groupe spécial orthogonal.*

13.2.5.4 Matrices orthogonales

Définition 13.8 *Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*
i) ${}^tM\, M = I_n$.
ii) $M\, {}^tM = I_n$.
iii) *M est inversible et* ${}^tM = M^{-1}$.

Proposition 13.11 *Une matrice est ortogonale si et seulement si elle la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.*

Proposition 13.12 *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale. Elle le reste alors dans toute base.*

Proposition 13.13 *Une matrice est ortogonale si et seulement si elle est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale.*

Proposition 13.14 *L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $M_n(\mathbb{R})$, noté $O(n)$. Toute matrice orthogonale est de déterminant égal à $+1$ ou -1. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $O(n)$ noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$.*

Un élément de $O(E)$ est dans $SO(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est dans $SO(n)$.

Interprétation matricielle de la méthode de Schmidt. Inégalité de Hadamard.

13.2.6 Réduction des endomorphismes autoadjoints

Définition 13.9 *Un endomorphisme u d'un espace préhilbertien réel E est dit autoadjoint (ou symétrique) si et seulement si : $u = u^*$*

Proposition 13.15 *Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.*

Réciproquement à toute matrice symétrique on peut associer naturellement un endomorphisme autoadjoint. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$ (en identifiant à nouveau une matrice $(1,1)$ avec un scalaire), l'application linéaire

$$\Phi_A : X \mapsto AX$$

est autoadjointe si et seulement si A est symétrique.
L'ensemble des endomorphismes autoadjoint est le sous-espace propre de l'application $u \mapsto u^*$, associé à la valeur propre 1. En particulier, c'est un sous-espace vectoriel. Si n est la dimension de E il est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 13.16 *Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs qui sont autoadjoints.*

Proposition 13.17 *Si u est un endomorphisme autoadjoint $Q : x \mapsto (x|u(x)) = (u(x)|x)$ est une forme quadratique. Réciproquement si Q est une forme quadratique il existe un unique endomorphisme autoadjoint u tel que $Q(x) = (x|u(x))$ pour tout x. On l'appelle l'endomorphisme autoadjoint associé à Q.*

Cet endomorphisme u a même matrice que ϕ dans toute base orthonormale.
Ce qui suit n'est plus au programme, mais continue à faire l'objet de problèmes.

Définition 13.10 *Un endomorphisme autoadjoint u est positif si et seulement si pour tout x $(u(x)|x) \geq 0$. Il est défini positif si et seulement si pour tout x non nul $(u(x)|x) > 0$.*

On définit de même les matrices symétriques positives et définies positives. Un matrice symétrique A est positive (rep. définie positive) si et seulement si Φ_A est positif (resp. défini positif).
Exemple : Si u est un endomorphisme les endomorphismes uu^* et u^*u sont autoadjoints et positifs. Il sont définis positifs si et seulement si u est inversible.

Théorème 13.5 *Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique (autoadjoint) de E. Il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u. Ce qui se dit aussi : u est diagonalisable dans une base orthonormale.*

Lemme 13.1 *Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ tout endomorphisme symétrique de E admet au moins une valeur propre.*

Première démonstration :
La fonction $\varphi : x \mapsto (x|u(x)$ est continue (composée du produit scalaire qui est une forme bilinéaire continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski et la caractérisation des applications bilinéaires continues, et de l'application linéaire $x \mapsto (x, u(x))$ qui est continue puisque définie sur un espace de dimension finie). L'ensemble $K = S(0,1) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est un compact non vide (il est non vide car E est non-réduit à $\{0\}$, il est compact car il est fermé et borné.) L'application φ atteint donc un maximum sur K. Il existe x_0 dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in K \quad (x|u(x)) \leq (x_0|u(x_0)) = \lambda.$$

Or si y est non nul dans E, $x = \frac{1}{\|y\|}y$ est dans K. En utilisant l'inégalité précédente, on en déduit

$$\forall y \in E \ y \neq 0 \quad (y|u(y)) \leq \lambda\|y\|^2,$$

ce résultat étant aussi vrai pour $y = 0$.
La forme quadratique $q : x \mapsto \lambda\|y\|^2 - (y|u(y))$ est donc positive. Puisque u est autoadjoint, sa forme polaire est $B(x, y) = \lambda(x|y) - (x|u(y)) = (x|\lambda y - u(y))$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii on a donc :

$$\forall x \in E \quad \left((x|\lambda y - u(y))\right)^2 \leq (x|\lambda x - u(x))(y|\lambda y - u(y)).$$

Par définition de λ le second membre est nul pour $y = x_0$. On obtient

$$\forall x \in E \quad (x|\lambda x_0 - u(x_0)).$$

Or le produit scalaire est non dégénéré donc $u(x_0) = \lambda x_0$, et, puisque x_0 est non nul, x_0 est vecteur propre et λ valeur propre.
Cette démonstration peut paraître complexe en regard de celle qui va suivre, mais elle en fait plus intéressante car elle se généralise aux espaces de dimension infinie et surtout elle donne une interprétation géométrique de la plus grande valeur propre d'un endomorphisme symétrique.

Deuxième démonstration : Les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice de u sont réelles.
Toutes les matrices de u dans des bases quelconques étant semblables elles ont toutes même polynôme caractéristique et en particulier même spectre. Soit donc M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. Puisque u est autoadjoint et $\lfloor$ symétrique la matrice M est symétrique. Prouvons que les valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice M symétrique sont en fait réelles.
Soit λ une valeur propre (dans $\mathbb{C}$) de M et X dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$, puis en passant au conjugué $\overline{MX} = \overline{\lambda X}$, soit $\overline{M}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puis, car M est réelle, $M\overline{X} = \overline{\lambda X}$. On transpose et on multiplie à droite par X on obtient

$$\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = {}^t(M\overline{X})X = {}^t\overline{X}MX = {}^t\overline{X}(MX) = \lambda{}^t\overline{X}X.$$

Or X est non nul donc ${}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ et en simplifiant $\overline{\lambda} = \lambda$ et λ est réel.

Lemme 13.2 *Si F est un sous-espace stable par l'endomorphisme symétrique u, alors u induit sur l'orthogonal de F un endomorphisme symétrique.*

Démonstration directe : Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.