Chapitre 14

Equations différentielles linéaires

Les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F, notée n, sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{K}$.
Les énoncés s'étendent sans difficulté au cas où F est un espace de Banach. On doit seulement remplacer « application linéaire »par « application linéaire continue »et $\mathcal{L}(F)$ par $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(F)$.
Les équations différentielles linéaires sont les seules dont l'étude théorique soit « complète ». Par exemple l'étude d'une équation linéaire à coefficients constants se ramène à une simple étude algébrique d'un opérateur linéaire.

14.1 Extension de la notion d'intégrale

Soit E un espace de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Toute fonction f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans E se décompose de manière unique sous la forme $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$. f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si chaque f_i est continue par morceaux sur $[a, b]$. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ on définit l'intégrale de f par

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} (\int_{[a,b]} f_i) e_i.$$

On vérifie que cet élément ne dépend pas de la base choisie.
Cette définition de l'intégrale est compatible avec tous les théorèmes sur les fonctions intégrables à valeurs complexes qui s'étendent sans difficulté en passant aux composantes. Un seul des résultats n'est pas facile à étendre : c'est l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt,$$

valable pour toute norme. Nous admettrons ce résultat. On peut par exemple le démontrer pour les fonctions en escalier, puis l'étendre aux fonctions continues par morceaux par passage à la limite uniforme.

14.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

14.2.1 Notion de solution

Définition 14.1 *Soit a une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{L}(F)$, et b une application continue de I vers F. On appelle solution sur I de l'équation*

$$(E) \qquad x' = a(t)x + b(t)$$

(notée plus simplement $x' = ax + b$) une fonction f de I vers F, dérivable, telle que

$$\forall t \in I \quad f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t).$$

a est une application de I vers $\mathcal{L}(F)$, pour t dans I $a(t)$ est une application linéaire. C'est la raison pour laquelle il faut écrire $a(t)(f(t))$. Un cas particulier important est celui où

$$\begin{array}{rcccc} a(t) & : & F & \to & F \\ & & x & \mapsto & a_1(t).x \end{array}$$

a_1 étant une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$, ce qui justifie l'abus de notation. L'interprétation matricielle pousse aussi en faveur de cette notation simplifiée. Un exemple classique où a ne peut s'interpréter immédiatement comme une multiplication est l'équation différentielle linéaire dans un espace euclidien E_3 de dimension 3 :

$$x' = \omega \wedge x,$$

ω étant une application continue de I vers E_3.

Proposition 14.1 *Une solution de (E) est nécessairement de classe C^1.*

14.2.2 Interprétation matricielle

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F. En introduisant les fonctions coordonnées X de x et les matrices $A(t)$ et $B(t)$ de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation (E) est équivalente à l'équation (E_1)

$$(E_1) \qquad X' = A(t)X + B(t),$$

où A et B sont deux fonctions continues de I vers $M_n(\mathbb{K})$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (on parle de système d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1).
Une solution de (E_1) sur I est une application dérivable X de I vers $M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

X est solution de (E_1) si et seulement si x est solution de (E).
On remarquera que (E_1) est en elle-même une équation différentielle linéaire. Il suffit de choisir $E = M_{n,1}(\mathbb{K})$, $a(t) : X \mapsto A(t)X$ et $b(t) = B(t)$.
Reprenons l'exemple précédent de l'équation

$$f' = \omega \wedge f.$$

Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale de E_3, si $\omega = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{i} + r\overrightarrow{k}$, $f = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{k}$ l'équation est équivalente au système

$$\begin{cases} x' = -ry + qz \\ y' = rx - pz \\ z' = -qx + py \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement

$$X' = AX$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

14.2.3 Le théorème de Cauchy

Théorème 14.1 *(Le théorème de Cauchy pour le problème de Cauchy linéaire) Soit*

$$x' = ax + b$$

une équation différentielle linéaire du premier ordre, où a et b sont des fonctions continues sur I. Soit (t_0, y_0) un point quelconque de $I \times F$. Alors il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(t_0) = y_0$.

La démonstration de ce théorème est admise. Néanmoins nous en donnerons une en complément dans quelques sections.

14.2.4 L'équation homogène

On appelle équation homogène l'équation dans laquelle $b = 0$, c'est-à-dire une équation de la forme

$$x' = ax.$$

On vérifie aisément que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions sur I de cette équation est un espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$). Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer beaucoup plus.

Théorème 14.2 *L'ensemble des solutions, sur I, de l'équation linéaire homogène*

$$x' = ax$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$, de dimension n.

En effet l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{t_0} & : & \mathcal{E} & \rightarrow & F \\ & & f & \mapsto & f(t_0) \end{array}$$

qui à une solution associe sa valeur en point t_0, fixé, de I est linéaire et est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy.

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de solution est, par définition, un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène si et seulement si c'est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène.

D'après le théorème de Cauchy , si t_0 est un point de I, $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système fondamental de solution si et seulement si $(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ est libre.

Soit $W(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant, dans une base fixée de E, de $(x_1, \ldots, x_n)$, famille quelconque de solutions de l'équation homogène. D'après la remarque précédente, si W est non nul en un point de I alors il ne s'annule jamais sur I. W s'appelle le wronskien [1] de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ce résultat intéressant peut être démontré sans utiliser le théorème de Cauchy. En effet W est solution de l'équation différentielle [2]

$$y' = (\mathrm{tr}\ a)\, y.$$

Donc

$$\forall t \in I \quad W(t) = W(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\,(a(u))\, du\Big).$$

1. Wroński (Józef Maria **Hoene**) polonais (Wolsztyn 1776-Neuilly 1853).
2. Cette équation non justifiée sera mise en évidence dans quelques cas particuliers

14.2.5 La méthode de la variation des constantes

La connaissance d'un système fondamental de solutions de l'équation homogène permet de résoudre l'équation non-homogène dite aussi équation avec second membre.
Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène, il est possible de trouver une solution de l'équation non-homogène sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

où les c_i sont des fonctions de classe C^1. Il suffit pour cela que leurs dérivées $(d_1, \dots, d_n)$ vérifient :

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i,$$

on peut donc les obtenir par quadrature (c'est-à-dire par le calcul de primitives).

Corollaire 14.1 *L'ensemble des solutions de l'équation*

$$x' = ax + b$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I)$, de dimension n.Toute solution de cette équation est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Remarque : Pratiquement, on peut aussi utiliser la linéarité de la solution comme fonction du second membre second membre[3]. Si y_1 est une solution de $x' = ax + b_1$ et y_2 une solution de $x' = ax + b_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $x' = ax + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Ceci constitue le principe de superposition, très utilisé dans le cas de la résolution effective d'équations, par exemple en physique.

14.2.6 Un complément : le théorème de Cauchy

Le théorème de Cauchy étant la clé de voute de notre théorie, pourquoi ne pas le démontrer ?
Sa démontration utilise typiquement les méthodes du cours sur les espaces vectoriels normés.
On peut se ramener au cas où I est un intervalle compact.
En effet, supposons le théorème de Cauchy vrai dans le cas de tout intervalle compact. Un intervalle I peut s'écrire comme la réunion d'un suite croissante d'intervalles compacts I_n contenant tous t_0.
Si x est une solution du problème de Cauchy sur I, sa restriction à I_n est une solution du problème de Cauchy sur I_n. Elle est unique (d'après notre hypothèse, et x aussi puisque I est la réunion des I_n.
Réciproquement, pour tout n il existe une solution sur I_n. Par unicité de cette solution, p est un entier plus grand que n, la restriction de x_p à I_n, qui est une solution sur I_n, est égale à x_n. On peut alors définir une solution sur I en posant $x(t) = x_n(t)$ si $t \in I_n$.
On suppose maintenant I compact, $I = [a, b]$.
Une fonction f de classe C^1 est solution de

$$x' = ax + b \ \wedge \ x(t_0) = 0$$

si et seulement si

$$\forall t \in I \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)\, du + \int_{t_0}^{t} a(u)(f(u))\, du.$$

3. C'est cette linéarité par rapport au second membre qui justifie l'appellation d'équation différentielle linéaire

Commençons par prouver l'unicité. Si f et g sont deux solutions du problème de Cauchy et si $h = f - g$, on a :

$$\forall t \in I \quad h(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(h(u))\, du.$$

Soit $M = \sup_{u\in I} \|a(u)\|$, qui existe car I est compact et $u \mapsto \|a(u)\|$ est continue. Si $C = \sup_I \|h\|$, On peut établir par récurrence :

$$\forall t \in I \quad \|h(t)\| \leq C\frac{M^n}{n!}|t - t_0|^n.$$

En effet le résultat annoncé est vrai pour $n = 0$. Supposons le vrai à l'ordre n, et établissons le à l'ordre $n+1$, en nous restreignant aux t plus grand que t_0 par exemple (le cas $t \leq t_0$ se traite de même) :

$$\|h(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|a(u)(h(u))\| du \leq \int_{t_0}^{t} \|a(u)\| \|h(u)\| du \leq \int_{t_0}^{t} MC\frac{M^n}{n!}(u - t_0)^n du = C\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}.$$

Il en résulte bien, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $h(t) = 0$ pour tout t c'est-à-dire $f = g$.
Passons maintenant à l'existence. On construit une suite f_n de fonctions par

$$\forall t \in I \ f_0(t) = x_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in I \quad f_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)\, du + \int_{t_0}^{t} a(u)(f_n(u))\, du.$$

Toutes ces fonctions sont continues sur I. La démonstration de l'inégalité obtenue dans le cadre de l'unicité s'adapte pour donner

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in I \quad \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq C\frac{M^n}{n!}|t - t_0|^n \leq C\frac{M^n}{n!}|b - a|^n,$$

où $C = \sup_I \|f_1(t) - f_0(t)\|$, puisque

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(f_n(u) - f_{n-1}(u))\, du.$$

La série $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ est par conséquent normalement (donc uniformément) convergente sur I, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément convergente , la suite $(u \mapsto a(u)f_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi car, pour tout u, $\|a(u)(f_n(u)) - a(u)(f(u))\| \leq M\|f_n(u) - f(u)\|$. Sa limite f est une fonction continue sur I, et puisque la convergence uniforme nous permet de permuter passage à la limite et intégration, elle vérifie

$$\forall t \in I \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)\, du + \int_{t_0}^{t} a(u)(f(u))\, du,$$

et c'est une solution du problème de Cauchy.

14.3 Equations linéaires à coefficients constants

14.3.1 Résolution

Les équations linéaires à coefficients constants est la seule grande classe d'équations différentielles que l'on sache résoudre explicitement.
On appelle équation différentielle linéaire à coefficients constants une équation de la forme $x' = ax + b$, où b est une fonction continue sur l'intervalle I, à valeurs dans E, et a un endomorphisme de E

Théorème 14.3 *L'unique solution sur* $\mathbb{R}$ *du problème de Cauchy* $(x' = ax) \wedge (x(0) = x_0)$ *est l'application* $t \mapsto \exp(ta)(x_0)$.

Le théorème de Cauchy nous affirme l'unicité d'une solution sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que l'on obtient bien une solution, ce qui résulte des théorèmes sur la dérivation des séries de fonctions.

Proposition 14.2 *Soit* a *un endomorphisme de l'espace vectoriel* F. *Alors pout tout couple* (s, t) *de réels*

$$\exp((s + t)a) = \exp(sa) \exp(ta).$$

Démonstration : en effet pour tout t les applications $s \mapsto \exp(sa) \exp(ta)$ et $s \mapsto \exp((s + t)a)$ sont toutes les deux solutions du problème de Cauchy dans $L(E)$: $u' = au \wedge u(0 = \exp(ta)$. Et ce problème possède une unique solution.
On en déduit que pour tout endomorphisme a l'endomorphisme $\exp a$ est inversible d'inverse $\exp(-a)$.
Remarquons que le théorème de Cauchy nous affirme aussi l'unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout intervalle contenant 0. Cette solution est donc la restriction de la solution définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 14.4 *La solution générale de l'équation* $x' = ax + b(t)$, *valant* x_0 *en* t_0 *est donnée par :*

$$x(t) = \exp\left((t - t_0)a\right)x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left((t - u)a\right)b(u)\, du.$$

14.3.2 Traduction matricielle

Par le choix d'une base toute équation linéaire à coefficients constants est équivalente à un sytème différentiel à coefficients constants :

$$X' = AX + B,$$

où A est une matrice et B une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}^n (\equiv M_{n,1}(\mathbb{K})$.
La résolution d'un tel système se ramène au calcul de $\exp(tA)$, qui s'effectue en réduisant la matrice A.
Voir le cours d'algèbre pour des exemples de calcul d'exponentielles de matrices.

Théorème 14.5 *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $X' = AX + B$, *où* A *est une matrice à coefficients constants de* $M_n(\mathbb{C})$ *(ou* $M_n(\mathbb{R})$ *dans le cas réel) est un espace affine de dimension* n.

Ce théorème est bien sur une conséquence du théorème de Cauchy. On a donné un énoncé spécifique car dans ce cas particulier il existe une démonstration constructive.
On pourrait donner une formule générale de la solution d'un tel système, en transcrivant matriciellement celle qui à été donnée pour l'équation linéaire, mais dans la pratique, on ne calcule pas explicitement l'exponentielle de A.
Etudions par exemple le cas le plus favorable, celui où A est diagonalisable. Soit P la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de A. La matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Soit $Y = PX$, alors X est solution de $X' = AX$ si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$, qui est facile à résoudre, car c'est un système de n équations indépendantes $y_i' = \lambda_i y_i$. X est solution de $X' = AX$ si et seulement si

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i,$$

où les V_i sont les vecteurs colonnes de P (c'est-à-dire une base de vecteurs propres) et les λ_i les valeurs propres associées. La famille $(c_1, \ldots, c_n)$ est une famille quelconque de scalaires. On résout l'équation avec second membre par la méthode de la variation des constantes, ou par identification dans le cas d'un second membre dont les coordonnées sont composées de polynômes et d'exponentielles (quasi-polynômes).

Remarquons que dans le cas où A est diagonalisable car elle possède n valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, le polynôme P_t d'interpolation de Lagrange envoyant chaque λ_i sur $\exp(t\lambda_i)$ vérifie $\exp(tA) = P_t(A)$. On peut donc calculer $\exp(tA)$ sans diagonaliser A.
Si A n'est pas diagonalisable, mais seulement trigonalisable, la méthode reste la même. Mais le système $Y' = TY$, où T est triangulaire supérieure et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, est résolu en commençant par y_n et en déterminant successivement y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_1. A chaque étape on est amené à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constant dont le second membre est formé de quasi-polynômes.
On remarquera que dans le cas où A ne possède qu'une seule valeur propre λ alors $A = \lambda I_n + N$, N nilpotente, et son exponentielle se calcule facilement. Le cas $\lambda = 0$ est immédiat, $\exp A$ est un polynôme en A. Si λ est non nul alors X est solution de $X' = AX$ si et seuelement si $Y = e^{-\lambda t}X$ est solution de $Y' = (A - \lambda I_n)Y$ et $(A - \lambda I_n)$ est nilpotente.
Dans le cas le plus défavorable, celui où A n'est même pas trigonalisable, le corps est nécessairement $\mathbb{R}$. On résout alors le système différentiel, en prenant $\mathbb{C}$ pour corps, et on ne conserve que les solutions à valeurs réelles.
Exercice : Si A est une matrice à coefficients réels, montrer que les solutions à valeurs réelles de l'équation $X' = AX$ sont exactement l'ensembles des parties réelles des solutions à valeurs complexes de $X' = AX$.

14.4 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 14.2 *On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre* 1 *une équation différentielle*

$$ay' + by = c$$

où a, b et c sont trois fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I.
L'équation

$$ay' + by = 0$$

s'appelle l'équation homogène associée.
Une solution sur un intervalle J contenu dans I est une fonction f dérivable sur J telle que pour tout t de J on ait

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t).$$

Une telle solution est dite maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution définie sur un intervalle strictement plus grand que J.
Si a ne s'annule pas sur I, en divisant par a on peut supposer $a = 1$. Une telle équation sera dite sous forme normale.

Théorème 14.6 *Soient a et b sont des fonctions scalaires continues sur un intervalle I . Etant donné (t_0, y_0) dans $I \times \mathbb{K}$ il existe une unique solution f de $y' = ay + b$, définie sur I telle que $f(t_0) = y_0$, et elle peut être explicitée*[4]

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_u^t a(\phi)\, d\phi} b(u)\, du + y_0 e^{\int_{t_0}^t a(u)\, du}$$

4. Cette formule difficile à retenir, ne présente pas énormément d'intérêt pratique. Pour résoudre rapidement cette équation je recommande de déterminer une fonction z dont la dérivée logarithmique $(\frac{z'}{z})$ est $-a$, de multiplier l'équation par z et de montrer qu'elle est équivalente à $(zy)' = zb$, qui se résout par simple intégration. Ce procédé est particulièrement pratique lorsque a est à valeurs complexes (par exemple $y' = \frac{1}{x+i}y + 1$).

Certains pourraient objecter que pour déterminer z il faut résoudre $z' = -a\,z$, et qu'on tourne en rond. Mais dans la pratique a est souvent une fraction rationnelle, qui peut être décomposée en éléments simples, pour laquelle est facile de trouver une fonction dont elle est la dérivée logarithmique.

Exemple : Résolution de l'équation

$$x(x-2)y' + (x-1)y = 1.$$

Pour la ramener à la forme normale il faut se placer sur $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ ou $]2, +\infty[$. Les théorèmes du cours ne s'appliqueront que sur ces intervalles, bien qu'il soit possible de démontrer, par exemple en utilisant un développement en série entière, que l'équation admet des solutions sur $]-\infty, 2[$ et $]0, +\infty[$.
Exercice : Prouver le résultat précédent, et plus précisément déterminer les solutions sur $]-\infty, 2[$ et $]0, +\infty[$ et montrer qu'il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$.

14.5 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

14.5.1 Definitions et théorèmes

Définition 14.3 *On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 une équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = d$$

où a, b, c et d sont quatre fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I. L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0$$

s'appelle l'équation homogène associée.
Une solution sur un intervalle J contenu dans I est une fonction f deux fois dérivable sur J telle que pour tout t de J on ait

$$a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t).$$

Une telle solution est dite maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution définie sur un intervalle strictement plus grand que J.
Si a ne s'annule pas sur I, en divisant par a on peut supposer $a = 1$. Une telle équation sera dite sous forme normale.

Si a, b, c et d sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si a ne s'annule pas sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^{k+2}$ sur I.
On se placera sous l'hypothèse $a = 1$ dans la suite, sauf mention expresse du contraire.
On peut associer à l'équation scalaire $y'' + by' + cy = d$ le système différentiel

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Si y deux fois dérivable sur I est solution de l'équation scalaire alors $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est dérivable sur I et est solution du système. Réciproquement $X = {}^t(y, z)$ est solution du système$y$ est deux fois dérivable sur I et une solution de l'équation scalaire . De plus $z = y'$.
Plus précisément, l'application

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) & \to & \mathcal{C}^1(I, M_{2,1}(\mathbb{K})) \\ & & y & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \end{array}$$

est une application linéaire qui réalise une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation scalaire sur l'ensemble des solutions du système différentiel.
On pourra donc utiliser les résultats obtenus dans le cas des systèmes linéaires.

Théorème 14.7 *L'ensemble des solutions de $x'' + bx' + cx = d$ est un sous-espace affine de $C^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.*

Plus précisément on a :

Théorème 14.8 *(Théorème de Cauchy dans le cadre des équations linéaires scalaires)Si a, b, c et d sont continues sur I,si $a$ne s'annule pas sur I et si (t_0, x_0, x_1) appartient à $I \times \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} ax'' + bx' + cx = d \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

possède une unique solution sur I.

On a énoncé le théorème avec la fonction a, car en pratique c'est ainsi qu'il faudra l'appliquer, en restreignant sont usage aux intervalles sur lesquels a ne s'annule pas ;
D'autre part il faut faire très attention aux conditions initiales. Il s'agit de contraintes sur les valeurs de la fonction et de sa dérivée en un même point, pas de deux contraintes de valeurs en des points distincts par exemple.

Théorème 14.9 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène $x'' + bx' + cx = 0$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{C})$ de dimension 2 (de $C^2(I, \mathbb{R})$) dans le cas réel).*

Définition 14.4 *Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène s'appelle un système fondamental de solutions.*

Définition 14.5 *Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation homogène, la fonction*

$$t \mapsto W(x_1, x_2)(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$$

s'appelle le wronskien de x_1 et x_2.

C'est le wronskien du couple $(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix})$ de solution du système d'ordre 1 naturellement associé à cette équation.

Proposition 14.3 *Si a ne s'annule pas sur I, le wronskien vérifie l'équation différentielle :*

$$W(x_1, x_2)'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)} W(x_1, x_2)(t).$$

On retrouve ainsi l'équation différentielle dont on avait parlé antérieurement.

Théorème 14.10 *La famille (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de l'équation homogène si et seulement si il existe un point t_0 où le wronskien $W(x_1, x_2)(t_0)$ est non nul. Il ne s'annule alors jamais sur I.*

14.5.2 La méthode de la variation des constantes

Si l'on transporte la méthode de la variation des constantes depuis le système linéaire d'ordre 1 qui lui est associé, vers une équation scalaire du deuxième ordre on obtient la méthode de la variation des constantes pour une équation scalaire linéaire du second ordre, avec second membre.

Théorème 14.11 *Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions sur I de l'équation homogène $ax'' + bx' + cx = 0$ (où a ne s'annule pas sur I) il est possible de trouver une solution de l'équation avec second membre $ax'' + bx' + cx = d$ sous la forme $c_1x_1 + c_2x_2$, où c_1 et c_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit pour cela de résoudre le système :*

$$\begin{cases} c_1' & x_1 & + & c_2' & x_2 & = & 0 \\ c_1' & x_1' & + & c_2' & x_2' & = & \frac{d}{a} \end{cases}.$$

On remarquera que le déterminant de ce système est justement le wronskien du système de solutions.

14.5.3 Cas où on connait une solution ne s'annulant pas

Proposition 14.4 *Si x_1 est une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I, il est possible de trouver une autre solution, formant avec elle un système fondamental de solution, en effectuant le changement de fonction inconnue $x = x_1 y$. x est solution sur I de*

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

si et seulement si y est solution de l'équation

$$y'' + \left(2\frac{x_1'}{x_1} + \frac{b}{a}\right) y' = 0,$$

qui est une équation linéaire du premier ordre en y'.

Exemple : résoudre

$$(x^2+1)y'' + xy' - 4y = 0$$

sachant que $2x^2+1$ est solution.

14.5.4 Recherche d'une solution

On peut prouver qu'il est impossible de résoudre une équation linéaire du second ordre quelconque en utilisant seulement les opérations algébriques usuelles (y compris les puissances rationnelles), les fonctions élémentaires ($\exp, \ln, \sin, \ldots$), et l'opération donnant la primitive d'une fonction (on parle de quadrature), même en les composant. Il est néanmoins possible dans certains cas de trouver une solution particulière.

14.5.4.1 Recherche d'une solution polynomiale

Exemple : condition sur λ pour que l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - \lambda y = 0$$

admette une solution polynomiale.

14.5.4.2 Recherche d'une solution sous la forme d'une série entière

Cette technique doit être parfaitement maîtrisée, car elle possède une portée plus générale. On peut montrer qu'elle s'applique dès que a, b, c et d sont développables en série entière. Elle peut même être utile lorque a s'annule.
Exemple : rechercher des solutions de l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - 4y = 0$$

sous la forme de la somme d'une série entière.

14.5.4.3 Utilisation d'un changement de variable

Cette technique conduit rarement à la solution, mais peut néanmoins servir à transformer une équation différentielle pour la mettre sous une forme plus commode.
Exemple : Résoudre l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - 4y = 0$$

en effectuant un changement de variable.

14.5.4.4 Recherche d'une solution sous la forme d'une série trigonométrique

Cette technique, très appréciée des physiciens, ne s'applique qu'aux équations à coefficients constants avec second membre, lorsque le second membre peut être développé en série de Fourier.
Exemple : rechercher une solution de l'équation

$$y'' + \omega^2 y = |\sin x|$$

sous la forme de la somme d'une série trigonométrique.