Chapitre 7

Fonction d'une variable réelle : dérivation

Dans ce chapitre toutes les fonctions sont à valeurs dans un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans tout ce chapitre les intervalles sont supposés d'intérieur non vide.

7.1 Dérivation

7.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 7.1 *Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, vers un e.v.n de dimension fine sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit x un point de A. f est dite dérivable en x si la fonction g définie sur $I - \{x\}$ par $g(y) = \dfrac{1}{y-x}.(f(y) - f(x))$ admet une limite en x. Cette limite se note $f'(x)$.*

Remarque 7.1 *On écrit $\frac{1}{y-x}.(f(y) - f(x))$ et non pas $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, car $f(y) - f(x)$ est a priori un vecteur et $\frac{1}{y-x}$ un scalaire. Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme c'était le cas en première année, une telle inversion ne prête pas à conséquence, mais il est bon de prendre dès à présent les bonnes habitudes car vous serez souvent confrontés à des fonctions à valeurs vectorielles.*

Proposition 7.1 *Une fonction f est dérivable en x si et seulement si elle admet en x un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\exists \mathbf{A} \in E \quad f(y) = f(x) + (y - x).\mathbf{A} + \circ(y - x).$$

$\mathbf{A}$ *est unique et vaut $f'(x)$.*

Remarque 7.2 *Comme dans la définition précédente il est important de se souvenir que $\mathbf{A}$ est un vecteur et qu'on ne peut donc écrire $\mathbf{A}(y - x)$, la multiplication par un scalaire opérant à gauche.*

Corollaire 7.1 *Si une fonction est dérivable en un point elle est continue en ce point.*

7.1.2 Dérivée

Définition 7.2 *Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. La fonction dérivée est alors la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Notation : la dérivée d'une fonction f peut être notée f', $\mathrm{D}f$, $\frac{df}{dx}$

Interprétation cinématique de la dérivée. Soit f une application de I vers E, où E est interprété plutôt comme un espace affine que comme un espace vectoriel. Une telle application s'appellera alors un mouvement (d'un point matériel). Si f est dérivable en t_0 $f'(t_0)$ s'appelle la vitesse du point matériel à l'instant t_0. Si f est deux fois dérivable en t_0, c'est-à-dire si sa dérivée est dérivable en t_0, alors la $f''(t_0)$ (la dérivée en t_0 de la dérivée) s'appelle l'accélération du point matériel en t_0.

7.1.3 Dérivée à droite, à gauche

Définition 7.3 *Si $f_{|[x,+\infty[\cap I}$ est dérivable en x, on dit que f admet une dérivée à droite en x. On définit de même la notion de dérivée à gauche en x.*

Notation : pour les dérivées à droite et à gauche on utilise les notations $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$.

7.1.4 Usage de coordonnées

Proposition 7.2 *Soit $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Soit f une fonction de l'intervalle I vers E et $(f_1, \dots, f_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable en x (resp. dérivable sur I, dérivable à gauche, dérivable à droite) si et seulement si chacune des f_i l'est et dans ce cas*

$$f'(x) = f'_1(x)e_1 + \cdots + f'_n(x)e_n$$

(resp. $f' = f'_1 e_1 + \cdots + f'_n e_n$, $f'_g(x) = {f_1}'_g(x)e_1 + \cdots + {f_n}'_g(x)e_n$, $f'_d(x) = {f_1}'_d(x)e_1 + \cdots + {f_n}'_d(x)e_n$).

Le cas particulier des fonctions à valeurs complexes mérite d'être retenu :

Proposition 7.3 *Une fonction f à valeurs complexes est dérivable si et seulement si $\overline{f}$ l'est, ou si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}\, f$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$ le sont. Dans ce cas :*

$$D(\overline{f}) = \overline{D(f)} \text{ et } Df = D(\mathcal{R}\mathrm{e}\, f) + iD(\mathcal{I}\mathrm{m}\, f).$$

Un autre cas particulièrement important est celui des fonctions à valeurs matricielles.

Proposition 7.4 *Une fonction $M : I \to M_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $M(x) = (m_{i,j}(x))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, est dérivable si et seulement si chaque fonction $m_{i,j}$ est dérivable. On a alors, pour tout x de I : $M'(x) = (m'_{i,j}(x))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.*

7.2 Opération sur les fonction dérivables

Proposition 7.5 *L'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E est un espace vectoriel et le passage à la dérivée est une application linéaire.*

Théorème 7.1 *Soit f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$, soit g une application dérivable d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ vers un e.v.n E. On suppose $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I. On a : $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$. C'est à dire :*

$$\forall x \in I \ \ (g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x)).$$

Remarque 7.3 *Encore une fois, il faut bien écrire $f'\,(g' \circ f)$ (le . peut être omis) et non pas $(g' \circ f)\, f'$, car pour x dans I $f'(x)$ est un scalaire et $g'(f(x))$ un vecteur. D'ailleurs le programme, pour bien insister sur la différence de type entre les fonctions f et g utilise la lettre grecque φ à la place de f, les lettres grecques étant usuellement utilisées pour représenter les scalaires.*

Proposition 7.6 *Soit f une application dérivable sur l'intervalle I, à valeurs dans E et u une application $\mathbb{R}$-linéaire de E vers F. Alors $u \circ f$ est dérivable et $D(u \circ f) = u \circ D(f)$.*

Exemple 7.1 *Si $A : I \to M_n(\mathbb{C})$ est une application dérivable, alors $\mathrm{tr}\,(A)$ aussi et $(\mathrm{tr}\,(A))' = \mathrm{tr}\,(A')$.*

Exemple 7.2 *Si E est un espace euclidien, f une application dérivable de I vers E et a un élément de E, alors $g = (a|f)$ est dérivable et $g' = (a|f')$*

Exemple 7.3 *Si X est une application dérivable de I dans $\mathbb{K}^n$, identifié à $M_{n,1}(\mathbb{K})$, si A est un élément de $M_n(\mathbb{K})$ alors $Y = AX$ est dérivable et $Y' = AX'$.*

7.2.1 Expression de la dérivée d'une fonction de la forme $B(f, g)$, où B est une application bilinéaire

Théorème 7.2 *Soit f une application de l'intervalle I vers un e.v.n de dimension finie E, soit g une application dérivable de I vers un e.v.n de dimension finie F. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G où G est un e.v.n de dimension finie. Alors si f et g sont dérivables sur A, il en est de même de $B(f, g)$, et l'on a : $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.*

Corollaire 7.2 *L'ensemble des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ dérivables sur I est une algèbre et de plus : $(fg)' = f'g + fg'$ pour tout couple (f, g) de fonctions appartenant à cet ensemble.*

Exemple 7.4 *Si f et g sont deux fonction dérivables à valeurs dans l'espace euclidien E, alors $h = (f|g)$ est dérivable et $h' = (f'|g) + (f|g')$. $\|f\|^2$ est dérivable et $D(\|f\|^2) = 2(f|D(f))$ (On obtient ainsi qu'un mouvement f est de norme constante si et seulement si la vitesse reste othogonale à f ; un mouvement s'exécute avec une vitesse algébrique constante si et seulement si l'accélération est orthogonale à la vitesses). Si E est l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ on peut dériver $f \wedge g$ en $D(f \wedge g) = D(f) \wedge g + f \wedge D(g)$ (Application : mouvement à accélération centrale).*

Exemple 7.5 *Si ϕ est une fonction numérique et f une fonction vectorielle, dérivables sur I, ϕf est dérivable sur I avec : $(\phi f)' = \phi' f + \phi f'$.*

7.2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 7.4 *Une fonction est dite de classe C^0 si elle est continue, et de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si elle est dérivable et si sa dérivée est de classe C^{k-1}.*

Vocabulaire 7.1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on appelle dérivée k-ième de f la dérivée de sa dérivée $(k-1)$-ième si $k \geq 1$, et la fonction elle-même si $k = 0$. On la note $f^{(k)}$, ou $D^k f$ ou $\frac{d^k f}{dx^k}$. On remarquera que cette définition reste valable, même si on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^k$, elle permet de définir les fonctions k fois dérivables et la dérivée k-ième d'une fonction k fois dérivable.*

Définition 7.5 *Une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k est dite de classe C^∞.*

Proposition 7.7 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur l'intervalle I, à valeurs dans le même espace E, est un espace vectoriel noté $\mathcal{C}^k(I, E)$.*

Remarque 7.4 *Si E est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, on écrira plus simplement : $\mathcal{C}^k(I)$.*

Théorème 7.3 (La formule de Leibniz) *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, à valeurs dans des espaces F et G et B une application bilinéaire de $F \times G$ vers E. Alors $B(F, G)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \, B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Par application de ce théorème au produit de deux fonctions, on prouve immédiatement :

Proposition 7.8 *$\mathcal{C}^k(I)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Théorème 7.4 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers $\mathbb{R}$, soit g une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ vers un e.v.n E. On suppose $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.*

Le théorème qui suit n'est pas inscrit au programme de deuxième année. C'est le rappel important d'un théorème de première année.

Définition 7.6 *Soit k un entier au moins égal à 1 ou $+\infty$. En première année le terme difféomorphisme n'est pas utilisé (il n'est pas non plus d'ailleurs au programme de deuxième année). On parle de bijection de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque. Une application f de l'intervalle I vers un intervalle J est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si c'est une bijection de I sur J, de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque.*

Théorème 7.5 *Pour qu'une application f de l'intervalle I vers $\mathbb{R}$ soit un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme, $k \geq 1$ de I sur $J = f(I)$ il faut et il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ et que sa dérivée ne s'annule pas.*

7.3 Intégration sur un segment

7.3.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 7.7 *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé de dimension finie E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ les coordonnées de f dans cette base. On appelle intégrale de f dans cette base, notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,dt$, l'élément :*

$$\int_{[a,b]} f = \left(\int_{[a,b]} f_1\right) e_1 + \cdots + \left(\int_{[a,b]} f_1\right) e_1.$$

Proposition 7.9 *Si $f : [a, b] \to E$ est une fonction en escalier, si $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_p = b)$ est une subdivision associée à f. Si pour tout i de $[0, p-1]$ et tout x de $]x_i, x_{i+1}[$ $f(x) = c_i$ alors*

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Cette définition de l'intégrale généralise donc bien l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier vue en première année.

Théorème 7.6 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a, b] \to E$, continues par morceaux sur $[a, b]$, convergeant uniformément vers $f : [a, b] \to E$, continue par morceaux sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Remarque 7.5 *On rappelle que la limite uniforme d'une suite de fonctions continue par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux. L'hypothèse sur f n'est donc pas inutile. Elle le devient si toutes les f_n sont continues, f étant alors continue.*

On déduit de la question précédente le théorème suivant qui aurait pu conduire à une autre définition de l'intégrale (mais il aurait alors fallu prouvé que la limite des intégrales des fonctions en escalier existait et ne dépendait pas de la suite).

Théorème 7.7 *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux, soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformémentvers f sur $[a,b]$ alors*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n.$$

En particulier l'intégrale de f ne dépend pas de la base choisie pour la calculer.

Exercice 7.1 *Utiliser la formule de changement de base pour retrouver directement le fait que l'intégrale de f ne dépend pas de la base choisie pour la calculer.*

7.3.2 Linéarité et relation de Chasles

Proposition 7.10 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \Lambda & : & \mathcal{C}_{mor}([a,b],E) & \to & E \\ & & f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est linéaire.

Proposition 7.11 (Relation de Chasles) *Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux. Soit c dans $[a,b]$, alors :*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

où on a conservé la notation f pour les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$.

Les deux résultats précédents découlent immédiatement des théorèmes similaires, vus en première année, appliqués aux fonctions coordonnées.

7.3.3 Inégalité triangulaire

Théorème 7.8 (Inégalité triangulaire) *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. On a :*

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|, \text{ ou } \left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

La deuxième écriture a le mérite de préciser que $\|f\|$ désigne la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ et non pas le nombre $\|f\|$ où $\|.\|$ serait une norme sur $\mathcal{C}_{mor}([a,b],E)$ qu'on aurait malheureusement noté avec le même symbole. La confusion est d'autant plus possible que très souvent on majorera $\|f(t)\|$ pour t dans $[a,b]$ par $\|f\|_\infty$. L'inconvénient de cette deuxième formulation est qu'elle ne précise pas qu'on doit avoir $a \leq b$, ce qui n'est pas toujours vérifié par exemple dans $\int_0^x f(t)\,dt$ lorsque $x \leq 0$. La bonne écriture, valable dans toutes les situations est :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \|f(t)\|\,dt.$$

7.3.4 Sommes de Riemann

Proposition 7.12 *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Ce résultat découle du résultat de première année en raisonnant sur les fonctions coordonnées.
On rappelle qu'en prenant la moyenne arithmétique des deux membres de gauche on obtient la formule des trapèzes

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \left(f(a) + f(b) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \right)$$

qui est bien plus efficace numériquement.

7.4 Intégrale fonction de la borne supérieure

7.4.1 Lien avec la dérivation

Théorème 7.9 *Si $f : I \to E$ est une application continue, a un point de I alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f. En particulier les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \mathbf{K} + \int_a^x f(t)\,dt$ où $\mathbf{K}$ parcourt E.*

On en déduit :

Corollaire 7.3 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si a et x sont deux éléments de I :*

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

7.4.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 7.10 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. On suppose qu'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de $[a, b]$ $\|f'(x)\| \leq M$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.*

Corollaire 7.4 *Une fonction définie sur un intervalle I est constante si et seulement elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée nulle.*

7.5 Formules de Taylor

7.5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 7.11 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur l'intervalle I. Soit a et x dans I, alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,dt.$$

On ne s'interdit pas $x < a$.
Cette formule se déduit de la formule analogue obtenue pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, en raisonnant coordonnée par coordonnée.

7.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 7.12 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur l'intervalle I. Soit a et b dans I alors :*

$$\left\| f(b) - \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right\| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{t \in [\min(a,b), \max(a,b)]} \| f^{(p+1)}(t) \|.$$

7.5.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 7.13 (Inégalité de Taylor-Young) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Soit a dans I, alors, au voisinage de a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \circ((x-a)^p).$$

Cette formule nécessite moins une hypothèse forte que les deux autres formules de Taylor (On pourrait même d'ailleurs se contenter de supposer que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et p fois dérivable en a. Pour $p = 1$ on retrouve ainsi l'existence d'un développement à l'ordre 1 pour une fonction dérivable). En contre-partie elle donne un information beaucoup moins forte sur le reste. D'une part parce que $r(x) = \mathcal{O}((x-a)^{p+1})$ implique $r(x) = \circ((x-a)^p)$ mais la réciproque n'est pas vraie ; et d'autre part car la formule de Taylor-Young ne donne aucune information quantitative sur le reste, mais seulement une information qualitative.

7.6 Arcs paramétrés

7.6.1 Arcs paramétrés

Définition 7.8 *Un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ vers E. Si $f : I \to E$ est un arc paramétré (de classe $\mathcal{C}^1$), l'ensemble $f(I)$ s'appelle le support de l'arc paramétré.*

Définition 7.9 *Un point $P = f(t_0)$ du support de l'arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ $f : I \to E$ est dit régulier d'une part $P = f(t)$ implique $t = t_0$ (on dit alors que le point est simple) et d'autre part $f'(t_0) \neq 0$.*

On dit aussi que P est associé à un paramètre régulier. On pourrait montrer que si $f'(t_0) \neq 0$ il existe un voisinage $V =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ de t_0 tel que la restriction de f à V soit injective. La condition importante est donc $f'(t_0) \neq 0$.

Définition 7.10 *Si $P = f(t_0)$ est un point associé à un paramètre régulier de l'arc f, la tangente à l'arc en P est la droite passant par P et dirigée par $f'(t_0)$. C'est la droite qui admet la paramétrisation $u \mapsto f(t_0) + uf'(t_0)$, u parcourant $\mathbb{R}$.*

Définition 7.11 *Un arc $f : I \to E$ est dit plan si* $\dim E = 2$.

En pratique un arc plan sera un arc à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 7.12 *Si $P = f(t_0)$ est un point associé à un paramètre régulier de l'arc f du* **plan euclidien** *E, la normale à l'arc en P est la droite passant par P dont un vecteur directeur est orthogonal à $f'(t_0)$.*

Dans le cas usuel où $E = R^2$ muni du produit scalaire usuel il est utile de se rappeler qu'un vecteur orthogonal à (a, b) est $(-b, a)$. Dans le cas plus général, si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormale du plan E, un vectur orthogonal à $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ est $-b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$.

7.6.2 Exemples simples d'arcs paramétrés

Exemple 7.6 *A une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathbb{R}$ on peut lui associer son graphe $G = \{(x, y); x \in I \ y = f(x)\}$. C'est le support de l'arc paramétré*

$$\begin{array}{cccc} g & : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$, clairement injective, de plus $g'(x) = (1, f'(x)) \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc tout point de G est régulier.
La tangente à $P = (x_0, f(x_0)$ est la droite Δ qui passe par P et qui est dirigée par $(1, f'(x_0))$. Elle admet la paramétrisation $u \mapsto (x_0 + u, f(x_0) + uf'(x_0)$. Un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ appartien à cete droite si et seulement si il existe u tel que $x = x_0 + u$, $y = f(x_0) + uf(x_0)$. Ceci implique $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. La réciproque est vraie (en choisissant $u = x - x_0$). En conclusion la tangente à G en $(x_0, f(x_0)$ est la droite d'équation

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \text{ ou bien } (x - x_0)f'(x_0) + (y - f(x_0)) = 0.$$

On retrouve la définition usuelle de la tangente en un point au graphe d'une application dérivable.
Il est bon de remarquer le résultat particulièrement utile suivant. La droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par (x_0, y_0) et est dirigé par (a, b), supposé non nul, est la droite d'équation :

$$(x - x_0)b - (y - y_0)a = 0$$

car elle passe par (x_0, y_0) et elle est perpendiculaire à $(b, -a)$ ou $(-b, a)$.
Il en résulte que l'équation de la normale à l'arc en $P = (x_0, f(x_0)$ est la droite d'équation

$$(x - x_0) + (y - y_0)f'(x_0) = 0$$

Exemple 7.7 (L'ellipse) *Si a et b sont deux réels strictement positif, c'est l'arc paramétré $f : t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$. C'est bien un arc de classe $\mathcal{C}^1$. Il est parcouru plusieurs fois car f est 2π-périodique. $f'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ n'est jamais nul. Tout point est associé à un paramètre régulier (quitte à réduite l'intervale de variation de t. On peut donc définir une tangente et une normale en tout point de l'ellipse $\mathcal{E}$, support de f.*
Au point de paramètre t la tangente à pour équation :

$$(x - a \cos t)b \cos t + (y - b \sin t)b \sin t = 0, \text{ soit : } b \cos t\, x + a \sin t\, y = ab.$$

La normale a pour équation

$$(x - a \cos t)a \sin t - (y - b \sin t)a \cos t = 0, \text{ soit : } a \sin t\, x - b \cos t\, y = (a^2 - b^2) \sin t \cos t.$$

On remarquera que lorsque $a = b$, la normale passe toujours par $(0, 0)$, ce qui est bien normale car l'ellipse est un cercle.