# Chapitre 8

# Intégration

Dans ce chapitre les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

## 8.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

## 8.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

## 8.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

## 8.4 Intégration sur un intervalle quelconque

## 8.5 Intégration des relations de comparaison

## 8.6 Le théorème de convergence dominée

**Théorème 8.1** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $I$. On suppose que cette suite converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe une fonction $\phi$ continue par morceaux, intégrable et telle que pour tout $n$ et tout $x$ de $I$ $|f_n(x)| \leq \phi(x)$. Alors chaque $f_n$ est intégrable ainsi que $f$, de plus :*

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n.$$

On dispose aussi d'une version étendue de ce théorème :

**Théorème 8.2** *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur $I$, où $\Lambda$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a$ un point adhérent à $\Lambda$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que pour tout $x$ de $I$ $\lim_{\lambda \to a} f_\lambda(x) = f(x)$, où $f$ est une fonction continue par morceaux. On suppose qu'il existe une fonction $\phi$ continue par morceaux, intégrable et telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x$ de $I$ : $|f_\lambda(x)| \leq \phi(x)$. Alors chaque $f_\lambda$ est intégrable ainsi que $f$, de plus :*

$$\int_I f = \lim_{\lambda \to a} \int_I f_n.$$

## 8.7 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

**Théorème 8.3** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $I$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction $f$ continue par morceaux. Alors si la série $\sum_{n\geq 0}\int_I |f_n|$ converge la fonction $f$ est intégrable et*

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n.$$

## 8.8 Intégrales dépendant d'un paramètre

### 8.8.1 Continuité

**Théorème 8.4** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A\times I$ où $A$ est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose :*

- *pour tout $t$ de $I$ l'application $x\mapsto f(x,t)$ est continue ;*
- *pour tout $x$ de $A$ l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux ;*
- *il existe une fonction $\phi : I\to\mathbb{K}$ continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall (x,t)\in A\times I \quad |f(x,t)|\leq \phi(t).$$

*Alors, sous ces hypothèses la fonction*

$$\begin{array}{cccc} F & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \int_I f(x,t)\,dt \end{array}$$

*est définie et continue sur $A$.*

**Remarque 8.1** *Le théorème précédent reste valable si la condition de majoration peut être simplement obtenue sur tout compact de $A$.*

**Exemple 8.1** *Cas où $I$ est un segment et $f$ est continue comme fonction de deux variables. On peut majorer sur $K\times I$ ($K$ compact de $A$) $|f|$ par une fonction constante car $f$ est continue sur $K\times I$ qui est compact. Cette fonction constante est intégable sur $I$. On en déduit que*

$$F : x\mapsto\in I f(x,t)\,dt$$

*est définie et continue sur $A$. Ce résultat n'étant pas au programme il faut le rejustifier à chaque fois.*

### 8.8.2 Dérivabilité

**Théorème 8.5** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J\times I$ où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose :*

- *pour tout $x$ de $J$ $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$ ;*
- *$(x,t)\mapsto \frac{\partial f}{x}(x,t)$ est définie sur $J\times I$ ;*
- *pour tout $x$ de $J$ $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;*
- *pour tout $t$ de $I$ $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $J$ ;*
- *il existe une fonction $\psi : I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall (x,t)\in A\times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \psi(t).$$

*Alors, sous ces hypothèses la fonction*

$$F : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I f(x,t)\,dt \end{array}$$

*est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$, de plus pour tout $x$ de $J$ on a (formule de Leibniz) :*

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$$

**Remarque 8.2** *Le programme impose à la fonction $t \mapsto f(x,t)$ d'être intégrable. Il suffit que $\int_I f(x,t)\,dt$ converge.*

**Proposition 8.1** *Le théorème précédent reste valable si la condition de majoration peut être simplement obtenue sur tout segment de $J$.*

Le théorème précédent peut être étendu pour prouver qu'une intégrale à paramètre est de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$.

**Théorème 8.6** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J \times I$ où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose :*

- *Pour tout $k$, $0 \leq k \leq p$ $(x,t) \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est définie sur $J \times I$ ;*
- *pour tout $k$, $0 \leq k \leq p$, pour tout $x$ de $J$ $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;*
- *pour tout $k$, $0 \leq k \leq p-1$, pour tout $x$ de $J$ $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $I$ ;*
- *il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi(t).$$

*Alors, sous ces hypothèses la fonction*

$$F : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I f(x,t)\,dt \end{array}$$

*est définie et de classe $\mathcal{C}^p$ sur $J$, de plus pour tout $x$ de $J$ et tout $k$, $0 \leq k \leq p$ on a :*

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$$

## 8.9 Intégration d'une intégrale à paramètre

Le programme dit :
« Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème necessitant son utilisation. »

# Table des matières