Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle
Les résultats de première année

Les résultats qui suivent ont été vus en première année. Ils doivent être parfaitement connus, tant par leurs conclusions que par leurs hypothèses. Ils sont d'utilité constante, une méconnaissance ou même une connaissance imparfaite de ces outils constitue un handicap sévère.

Dans ce chapitre, sauf mention explicite d'autres hypothèses, toutes les fonctions sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et à valeurs réelles. La plupart de ces résultats se généralisent aux espaces de dimension finie, et deviennent ainsi des résultats du cours de deuxième année, d'autres nécessitent impérativement que la fonction soit à valeurs réelles.

D'une manière générale j'ai incrit en gras les hypothèses qui doivent être impérativement rappelées au moment d'appliquer le théorème ou la proposition.

Convention : I, J, I_1,. . .désignent toujours des intervalles, A une partie quelconque.

1.1 Les résultats

Théorème 1.1 (Le théorème des valeurs intermédiaires) *L'image par une fonction* **continue** *et* **à valeurs réelles** *de tout intervalle est un intervalle.*

On peut exprimer d'un autre manière cet énoncé.

Théorème 1.2 (Le théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Soit $a \leq b$ deux points de I, et m dans $\mathbb{R}$ tel que $\min(f(a), f(b)) \leq m \leq \max(f(a), f(b))$ (ce qui peut aussi s'écrire $(m - f(a))(m - f(b)) \leq 0$), alors il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = m$.*

C'est le bon moment de réviser la recherche dichotomique d'un c tel que $f(c) = 0$ si $f(a)f(b) \leq 0$, avec sa programmation en Python.

Théorème 1.3 (Le théorème de la bijection) *Une fonction* **continue** *$f : I \to \mathbb{R}$ est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si elle est strictement monotone.*

Théorème 1.4 (Le théorème de la bijection pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f réalise une bijection croissante (resp. décroissante) de I sur $f(I)$ si et seulement si f' est positive ou nulle sur I (resp. négative ou nulle) et ne s'annule sur aucun intervalle non réduit à un point. De plus si cette hypothèse est vérifiée $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable si et suelement si f' ne s'annule jamais. Dans ce cas $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Théorème 1.5 (Le théorème de Rolle) *(note[1]) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, vérifiant*

- *f est* **à valeurs réelles**,
- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*

1. Michel Rolle, Ambert 1652– Paris 1719. Rolle n'énonce pas ce théorème, mais utilise cette propriété sans la justifier alors qu'il étudie les racines réelles des polynômes.

— $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c *dans* $]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Théorème 1.6 (L'égalité des accroissements finis) *Soit* f *une fonction définie sur* $[a, b]$, $a < b$, **à valeurs réelles**, *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$, *alors il existe* c *dans* $]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Théorème 1.7 (Le théorème fondamental de l'analyse) *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction* **continue** *sur l'intervalle* I, *à valeurs réelles ou complexes. Alors* f *admet des primitives sur* I. *Si* a *est un point quelconque de* I *l'une d'elle est*

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

Les autres primitives sont les fonctions $F_a + k$ *où* k *parcourt* $\mathbb{R}$

Ce résultat ainsi que celui qui suit se généralisera aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

Ce qu'il faut retenir de ce théorème c'est que chaque fois où vous affirmez que la dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est $x \mapsto f(x)$ vous devez vous assurer et rappeler que f est continue.

Théorème 1.8 (Le théorème fondamental de l'analyse) *Soit* f *une fonction* **de classe** $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle* I, *à valeurs réelles ou complexes, alors pour tout couple* (a, b) *d'éléments de* I :

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Le théorème qui suit, d'usage courant, est un des théorèmes du cours les plus mal appliqués.

Théorème 1.9 (Le théorème de la limite de la dérivée) *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *non réduit à un point, à valeurs réelles, et* a *un point de* I . *On suppose :*
i) f *est est continue sur* I,
ii) $\tilde{f}$, *la restriction de* f *à* $I\backslash\{a\}$ *est dérivable,*
iii) $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x) = \lim_{x\to a} (\tilde{f})'(x) = \ell$ *existe*
Alors f *est dérivable sur* I *et* $f'(a) = \ell$.

Dans la condition *iii*) on utilise deux écritures pour le membre de gauche. Si, comme c'est souvent le cas , la fonction f est en fait la prolongée d'une fonction f initialement définie sur $I\backslash\{a\}$, il faut utiliser la première écriture **en insistant sur la contrainte** $x \neq a$.

Ce théorème s'étend au cas $\ell = \pm\infty$, en s'autorisant des dérivées infinies.

Cet énoncé est celui du cours de première année, il vaut mieux apprendre celui du programme de deuxième année :

Théorème 1.10 (Le théorème de la limite de la dérivée) *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *non réduit à un point, à valeurs dans un espace de dimension finie, par exemple à valeurs complexes, et* a *un point de* I . *On suppose :*
i) f *est continue sur* I,
ii) $\tilde{f}$, *la restriction de* f *à* $I\backslash\{a\}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$,
iii) $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x) = \lim_{x\to a} (\tilde{f})'(x) = \ell$ *existe*
Alors f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $f'(a) = \ell$.

1.2 Exemples de mise en application

1.2.1 Le théorème de la bijection pour une fonction dérivable

Exemple 1.1 *Soit* n *un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation*

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède au plus une solution x_n *strictement positive.*

La première idée serait d'introduire la fonction $f : x \mapsto x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$ mais le signe de la fonction dérivée n'est pas du tout facile à étudier. Il reste des monômes à coefficients négatifs et un monome à coefficient positif.

L'idée est de transformer cette équation. Considéons si $x > 0$ la fonction

$$g : y \mapsto y^n f(\frac{1}{y}) = 1 - y - y^2 - \cdots y^n.$$

On a $f(x) = x^n g(\frac{1}{x})$. Donc pour $x > 0$ $f(x) = 0$ si et seulemnt si $g(\frac{1}{x}) = 0$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ sur lui-même, f possède un unique zéro sur $\mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si g possède un unique zéro sur $\mathbb{R}^{*+}$

Or g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, et en particulier continue, de plus

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = -(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) < 0$$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

On peut appliquer le théorème de la bijection : g réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $]-\infty, 1[$. En particulier il existe un unique $y_n > 0$ tel que $g(y_n) = 0$, et donc un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = 0$.

q.e.d.

Complément : développement asymptotique de x_n Pour rappeler la dépendance en n, les fonctions f et g de l'étude précédente s'appelleront f_n et g_n.

On a $g_{n+1}(y_n) = 0 - y_n^n <$. Or g_{n+1} est strictement décroissante donc $y_{n+1} < y_n$. La suite (y_n) est strictement décroissante, par conséquent la suite (x_n) est strictement croissante. De plus $g_n(1) = 1 - n < 0$ donc $y_n < 1$ et $x_n > 1$.

Si $x \neq 1$

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^n(x-2) + 1 = 0.$$

La suite (x_n) est strictement croissante elle tend vers une limite ℓ dans $[x_2, +\infty]$, avec $\ell > x_2 > 1$. Si on passe à la limite dans $x_n^n(x_n - 2) + 1 = 0$, on voit qu'il est nécessaire que $\ell = 2$.

On donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.

On peut écrire $x_n = 2 - \epsilon_n$ avec $\epsilon_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} = 0$. De plus

$$\epsilon_n = \frac{1}{(2 - \epsilon_n)^n}.$$

En particulier $\epsilon_n = \circ[(\frac{2}{3})^n]$, et en reprenant l'équation précédente

$$\epsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \circ [(\frac{2}{3})^n]\right)^n}.$$

Or, par exemple en passant au logarithme , $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \circ [(\frac{2}{3})^n]\right)^n = 1$ et par conséquant $\epsilon_n \sim \frac{1}{2^n}$ et

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \circ(\frac{1}{2^n}).$$

q.e.d.

1.2.2 Le théorème de la limite de la dérivée

Exemple 1.2 *La fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Commençons par démontrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Il est clair que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f en une fonction continue g telle que $g(0) = 0$, $g(x) = x$ si $x \neq 0$. La tradition est d'appeler encore cette fonction f. Nous nous plierons à cette tradition.

La fonction prolongée f, est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $\forall x \neq 0$ $f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Le théorème de croissance comparée donne $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f'(x) = 0$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$.

Pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on montre, par récurrence sur k et en utilisant les mêmes arguments, que f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k avec $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, où (P_k) est une suite de fonctions polynomiales définie par $P_0 = 1$, $P_{k+1} = P_k'(x) - (3kx^2 - 2)P_k(x)$ (note [2]).

q.e.d.

2. Pour convaincre il faut vraiment donner la relation de récurrence.

1.2.3 L'application itérée du lemme de Rolle

Exemple 1.3 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0,1]$ il existe c dans $]0,1[$ tel que*

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Si $x = 0$ ou $x = 1$ le résultat est vrai en choisisant un c quelconque dans $[0,1]$ (par exemple 0).

On suppose maintenant x dans $]0,1[$ et on on considère la fonction ϕ_x définie sur $]0,1[$ par

$$\phi_x(t) = f(t) - A_x t^2(1-t)^2$$

où A_x est choisi de telle sorte que $\phi_x(x) = 0$ (c'est possible car $x^2(1-x)^2 \neq 0$, A_x est même unique).

ϕ_x est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$, à valeurs réelles et $\phi_x(0) = \phi_x(x) = 0$. Il exsite donc x_1 dans $]0,x[$ tel que $\phi'_x(x_1) = 0$. Pour la même raison, il existe x_2 dans $]x,1[$ avec $\phi'_x(x_2) = 0$.

D'autre part $\phi'_x(t) = f'(t) - 2A_x(2t-1)t(t-1)$, donc $\phi'_x(0) = \phi'_x(1) = 0$. On a donc trouvé quatre réels x_0, x_1, x_2, x_3 avec $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$ tels que $\phi'_x(x_i) = 0$.

ϕ'_x étant dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs réelles, on peut lui appliquer le même raisonnement pour obtenir trois réels y_0, y_1, y_2 avec $x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$ et $\phi''_x(y_i) = 0$.

Une nouvelle application de la méthode donne z_0, z_1 avec $y_0 < z_0 < y_1 < z_1 < y_2$ et $\phi_x^{(3)}(z_i) = 0$.

Une ultime itération nous donne un c, $z_0 < c < z_1$, avec $\phi_x^{(4)}(c) = 0$.

Or $\phi_x^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - 24A_x$. On obtient donc $A_x = \frac{f^{(4)}(c)}{24}$.

q.e.d.

Remarquons qu'il n'est pas besoin de calculer les dérivées successives de $g : t \mapsto t^2(1-t)^2$. En effet c'est une fonction polynomiale unitaire de degré 4, sa dérivée quatrième est $t \mapsto 4!(= 24)$. Il n'était même pas besoin de calculer sa dérivée. 0 et 1 étant des racines de g d'ordre 2 on a $g'(0) = g'(1) = 0$

1.2.4 Le théorème fondamental de l'analyse

Exemple 1.4 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution du problème différentiel :*

$$y'' + y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$$

si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout x :

$$f(x) = a + bx - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

La démonstration s'adapterait au cas d'une équation $y'' + vy = w$ où u et w sont des fonctions continues ; 0 pourrait aussi être remplacé par t_0. Ce n'est que pour isoler le principe fondamental que nous nous limitons à la forme simple de l'équation.

Sens direct : on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'' + f = 0$, $f(0) = a$, $f'(0) = b$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = a - \int_0^x \frac{d}{dt}(x-t)f'(t)\,dt.$$

Puisque f' est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut effectuer une intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = a - \left\{[(x-t)f'(t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (x-t)f''(t)\,dt.\right\} = a + bx - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Sens réciproque : Soit f continue telle que :

$$f(x) = a + bx + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = a + bx - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt.$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ sont continues donc les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt$, de dérivées $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto xf(x)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $x \mapsto b - \int_0^x f(t)\,dt$. Il en résulte d'une part que $f'(0) = b$ et d'autre part, par le même raisonnement que précédemment, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f'' = -f$.

En conclusion f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'' + f = 0$, $f(0) = a$ et $f'(0) = b$.

q.e.d.

1.3 Les démonstrations

1.3.1 Démonstration du théorème 1.1

On démontre la deuxième version du théorème.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On peut supposer sans perdre en généralité que $f(a) \leq f(b)$. Soit m dans $\mathbb{R}$ tel que $f(a) \leq m \leq f(b)$. Soit $E = \{x \in [a, b]; f(x) \leq m\}$. cet ensemble est non vide (il contient a et majoré (par b). Il possède donc une borne supérieure c.

c est limite d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E. Pour tout n $f(c_n) \leq m$. Puisque f est continue en c, par passage à la limite on obtient $f(c) \leq m$.

Si $c = b$ alors $f(b) = f(c) \leq m \leq f(b)$ donc $m = f(b) = f(c)$. Si $m < b$ lors quelque soit x dans $]c, b]$ $f(x) > m$. En faisant tendre x vers c et en utilisant une nouvelle fois la continuité de f on obtient $m \leq f(c)$ et finalement $m = f(c)$.

q.e.d.

1.3.2 Démonstration du théorème 1.3

Condition nécessaire : On suppose que f n'est pas strictement monotone. Il existe donc dans I trois élément a, b et c avec $a < b < c$ et $f(b) \geq f(a)$ et $f(b) \geq f(c)$ (ou $f(b) \leq f(a)$ et $f(b) \leq f(c)$ et dans ce cas il suffit d'inverser les inégalités dans la démonstration qui suit).
Si $f(a) \geq f(c)$ alors $f(c) \leq f(a) \leq f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un x dans $[b, c]$ et donc distinct de a tel que $f(x) = f(a)$. f n'est donc pas injective. Le raisonnement est symétrique si $fa) \leq f(c)$.

Condition suffisante : Si f est strictement monotone alors elle est injective. Puisque par définition $f : I \to f(I)$ est surjective, il en résulte qu'elle est bijective.

q.e.d.

1.3.3 Démonstration du théorème 1.5

f est continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Si elle est constante alors $f' = 0$ sur $]a, b[$ et par exemple $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$. Sinon il existe x dans $]a, b[$ tel que $f(x) > f(a)$ ou $f(x) < f(a)$. Supposons par exemple $f(x) > f(a)$. Dans ce cas f atteint en un certain c son maximum M (car f est continue sur le segment $[a, b]$, **à valeurs réelles**). $f(c) = M \geq f(x) > f(a) = f(b)$, donc $c \in]a, b[$ et $[a, c[$ et $]c, b]$ sont non-vides.

Pour x dans $[a, c[$ $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Par passage à la limite $f'(c) \geq 0$.

Pour x dans $]c, b]$ $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. Par passage à la limite $f'(c) \leq 0$.

Finalement $f'(c) = 0$.

q.e.d.

1.3.4 Démonstration du théorème 1.6

On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

q.e.d.

1.3.5 Démonstration du théorème 1.7

Commençons par remarquer qu'il résulte du théorème 1.6 qu'une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle est constante si et seulement si elle est dérivable, de dérivée nulle. Ce résultat s'étend au fonctions à valeurs complexes en séparant partie réelle et partie imaginaire (puis aux fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie en considérant les fonctions coordonnées).

Par soustraction on en déduit que deux fonctions dérivables sur un intervalle ont même dérivée si et seulement si leur différence est constante.

Ceci établit la partie finale du théorème.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une fonction continue, et a dans I. La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est bien définie puis que pour tout x de I f est continue sur le segment $[\min(a,x), \max(a,x)]$.
Soit x_0 dans I et x dans $I - \{x_0\}$. On a

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_a^x (f(t) - f(x_0))\,dt$$

Il en résulte

$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup_{t\in[\min(a,x),\max(a,x)]} |f(t) - f(x_0)|.$$

Or f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{x\to x_0} \sup\limits_{t\in[\min(a,x),\max(a,x)]} |f(t) - f(x_0)| = 0$ et par conséquent

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Ceci dit bien que F_a est dérivable en tout x_0 de I, donc dérivable et de dérivée f. F_a est bien une primitive de f.

q.e.d.

1.3.6 Démonstration du théorème 1.9

Il suffit de démontrer que f est dérivable en a. Or toutes les hypothèses du théorème des accroisement finis sont vérifiées (s'en assurrer). Pour tout x distint de a n a donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in [\min(x,a), \max(a,x)].$$

Les hypothèses du théorème montrent immédiatement par passage à la limite que f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.
Dans le cas où $\ell = \pm\infty$ on en déduit aussi que f n'est pas dérivable en a, ou alors au sens étendu.

q.e.d.

1.3.7 Démonstration du théorème 1.10

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f'(x)$ si $x \neq a$ et $g(a) = \ell$. g est continue sur I, elle admet donc au moins une primitive G et celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$
Si $I_{=}I\cap]-\infty, a[$ n'est pas vide, alors c'est un intervalle et sur cet intervalle f et G sont des primitives de $g = f'$. Il existe donc une constante c_- telle que $f = G + c_-$ sur I_-. Puisque f et G sont continues sur $I\cap]-\infty, a]$ on a, par prolongement des égalités, $f = G + c_-$ sur $I\cap]-\infty, a]$. En particulier $c_{=}f(a) - G(a)$ et $f = G + f(a) - G(a)$ sur $I\cap]-\infty, a]$.
Si $I_+ = I\cap]a, +\infty[$ n'est pas vide, un raisonnement similaire donne $f = G + f(a) - G(a)$ sur $I \cap [a, +\infty[$.
On a prouvé que $f = G + f(a) - G(a)$ sur I. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = G'(a) = g(a) = \ell$.

q.e.d.

1.4 Exercices et problèmes

1.4.1 Exercices adaptés au déroulement du chapitre

Exercice 1.1 *1) Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

2) On pose $P_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)$. Montrer qu'il existe un unique r_n dans $]0,1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.

3) Montrer que r_n appartient à $]0, \frac{1}{2}[$. (Utiliser $\frac{P_n'}{P_n}$.)

4) Etudier

$$h : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

En déduire un équivalent de r_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 1.2 *Soit f et g continues de $[0,1]$ vers $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.*

1) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est non vide et admet un plus grand et un plus petit élément.

2) Montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 1.3 (*) *1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et*

$$J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}, J_n = J_0$$

des intervalles (segments) de I tels que pour tout k de $[1,n]$ J_k est inclus dans $f(J_{k-1})$. Montrer qu'il existe un point p de I tel que $f^n(p) = p$ (composition n fois) et pour tout k $f^k(p)$ appartienne à J_k.

2) Soit f continue tels que il existe p tels que $f^3(p) = p$ et $f^2(p) \neq p$ et $f(p) \neq p$ montrer alors qu'il existe pour tout k de $\mathbb{N}$ un x tel que $f^k(x) = x$ et que pour tout $l < k$ $f^l(x) \neq x$.

Exercice 1.4 *Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ vers $[a,b]$, avec $0 < a < b$, et f une fonction de classe C^1, définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = \phi \circ f$.*

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I = f(\mathbb{R})$, et que f^{-1} est de classe C^1 sur I.

2) Prouver que I est égal à $\mathbb{R}$.

3) Pour y dans $\mathbb{R}$ exprimer $(f^{-1})'(y)$ en fonction de f et de ϕ.

Exercice 1.5 (CCS) *Soit f une fonction continue et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$*

1) Montrer $\tan x = f(x)$ possède une unique solution x_n sur $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

2) Donner un équivalent de x_n.

3) $y_n = x_n - n\pi$. Que dire de (y_n) ?

4) $f(x) = \frac{1}{x}$. déterminer a, b et c tels que

$$x_n = n\pi + a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$$

5) Même question avec $f(x) = -x$.

Exercice 1.6 (CCMP) *On note pour $n \geq 1$*

$$(E_n) \qquad x = 1 + \ln(x+n)$$

1) Montrer que E_n admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, notée α_n.

2) Donner un équivalent de α_n et e^{α_n}.

3) Déterminer la limite, notée l, de $(\alpha_n - \ln(n))$.

4) Quelle est la nature de la série de terme général

$$\alpha_n - \ln(n) - l?$$

Exercice 1.7 (X) *On note x_n la racine réelle de $x^n - nx + 1 = 0$. Donner les premiers termes du développement asymptotique de x_n.*

Exercice 1.8

1) Soit P un polynôme réel scindé à racines simples. Prouver que P' est scindé à racines simples.

2) Soit P n polynome réel scindé. Montrer que P' est scindé.

Exercice 1.9 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tendant vers 0 en $+\infty$, et telle qu'il existe x_0 avec $f(x_0)f'(x_0) \geq 0$. Prouver l'existence d'un $x_1 \geq x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$. Prouver l'existence d'une suite strictement croissante $(x_k)_{k\geq 1}$ telle que $f^{(k)}(x_k) = 0$.*

Exercice 1.10 *Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs complexes il n'existe pas nécessairement un élément c de $[a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Exercice 1.11 *Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) = e^x$ ne possède qu'un nombre fini de racines.*

Exercice 1.12 (Le théorème de Darboux) *Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles, on suppose $f(a) > f(b)$ ainsi que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.*

1) Faire un dessin.

2) Il existe c de $]a, b[$ tel que $f(c) > f(a)$.

3) Il existe d de $]a, b[$ tel que $f(d) = f(a)$.

4) Il existe e de $]a, b[$ tel que $f'(e) = 0$.

5) Convaincre votre interlocuteur que les différentes possibilités découlant de la simple hypothèse $f'(a)f'(b) < 0$ pourraient se traiter de la même manière.

6) Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles, telle que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$, soit γ un réel compris entre α et β, en considérant la fonction $g(x) = f(x) - \gamma x$ établir qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f'(c) = \gamma$.

Exercice 1.13 (Règle de L'Hospital) *Soient f et et g deux applications à valeurs réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b]$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et que g ainsi que g' ne s'annulent pas sur $]a, b]$. Etablir que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad ,$$

dès que le membre de droite existe. (On pourra prouver que pour tout x de $]a, b]$ il existe c dans $]a, x[$ tel que $f(x)g'(c) - f'(c)g(x) = 0$, on introduira pour cela fonction $\phi(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x)$.)

Exercice 1.14 *Soit f une fonction à valeurs réelles deux fois dérivable sur $[a, a + 2h]$ $(h > 0)$. Montrer qu'il existe un réel θ compris entre 0 et 1 tel que : $f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h)$.*

Indication : Définir la fonction $\phi(x) = f(a) - 2f(a+x) + f(a+2x) - Ax^2$ où A est déterminé par $\phi(h) = 0$ (est-ce possible ?) et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 1.15

1) Soit $f : I \to E$ une application dérivable en x_0, soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de I telles que :

— $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq x_0 \leq b_n$,

— $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq b_n$,

— $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n - a_n}(f(b_n) - f(a_n)) = f'(x_0).$$

On suppose maintenant f dérivable sur le segment $[a, b]$ et on se donne une fonction g dérivable sur $[a, b]$. On suppose de plus $\|f(b) - f(a)\| \geq g(b) - g(a)$.

2) On note $c = \frac{a+b}{2}$, montrer $\|f(b) - f(c)\| \geq g(b) - g(c)$ ou $\|f(c) - f(a)\| \geq g(c) - g(a)$.

3) En déduire l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) et d'un x_0 vérifiant les hypothèses de la première question et telles que de plus, pour tout n : $\|f(b_n) - f(a_n)\| \geq g(b_n) - g(a_n)$.

4) En déduire l'existence d'un x_0 tel que $\|f'(x_0)\| \geq g'(x_0)$.

5) En remplaçant g par $g_\epsilon : x \mapsto g(x) + \epsilon x$, pour un ϵ bien choisi, montrer que si $\|f(b) - f(a)\| > g(b) - g(a)$, il existe x_0 tel que $\|f'(x_0)\| > g'(x_0)$. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1.16

1) Donner la partie principale en 0 *de la fonction* $\phi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

2) Montrer que cette fonction peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1.4.2 Exercices non triés sur les fonctions d'une variable réelle

Exercice 1.17 *Résoudre l'équation* $\arctan^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 1.18 *Pour tout θ réel non multiple de π, on pose :*

$$f(X) = \frac{1}{1 - 2\cos\theta\, X + X^2}.$$

1) Décomposer $f(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

2) En déduire sous forme complexe la dérivée d'ordre n de f.

3) Montrer que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(X)}{(1 - 2\cos\theta X + X^2)^{n+1}},$$

où P_n est un polynôme de degré n. On calculera les coefficients $a_{n,k}$ ainsi définis :

$$\frac{1}{n!} P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^{n-k} \quad ,$$

par une formule utilisant les coefficients binomiaux et les fonctions

$$S_k(\theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

4) Déterminer la valeur de

$$\lambda_{n,k} = \lim_{\theta \to 0} a_{n,k}(\theta).$$

Etait-ce prévisible ? Pourquoi ?

5) Montrer que P_n possède n racines distinctes dont on donnera l'expression.

Exercice 1.19 *f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. g est définie par $g(x) = f(x^2)$.*

1) Prouver que pour tout n il existe des réels $a_{n,k}$ tels que

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n,k} (2x)^{n-2k} f^{(n-k)}(x^2) \quad .$$

Indication : La rédaction est plus facile si l'on adopte la convention $a_{n,k} = 0$ quand $2k > n$.

2) Etablir une relation de récurrence entre les $a_{n,k}$, en déduire $a_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-2k)!}$.

3) Expliciter le polynôme P_n tel que $P_n(x) = e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

Exercice 1.20 *1) Si a est un nombre complexe calculer :* $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{ax}$.

2) En déduire $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{3x} \sin(4x)$.

Exercice 1.21 *Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I, à valeurs réelles, soit $[a, b] \subset I$ et $x \in [a, b]$.*

1) Montrer qu'il existe une unique fonction affine P telle que $P(a) = f(a)$ et $P(b) = f(b)$. L'expliciter.

2) Montrer que :

$$\forall x \in [a, b] \ \exists c \in]a, b[\quad f(x) - P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c) \quad .$$

3) En déduire que f est convexe si f'' est positive sur I.

4) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.22 *Etablir :* $\forall t \in [0, 1] \quad t + \frac{1}{3}t^3 \leq \tan t \leq t + \frac{14}{25}t^3$.

Indication : Etudier deux fonctions bien choisies.

Exercice 1.23 *Etudier la fonction* $f : t \mapsto 2te^{1/t} + 4t^3 - 15t^2 + 18t$.

1) Domaine de définition. Prolongement par continuité à droite ou à gauche.

2) Dérivabilité, dérivabilité à droite.

3) Branches infinies du graphe, position par rapport aux asymptotes.

4) Montrer que $f'(t) = 2\frac{t-1}{t}e^{1/t}g(t)$. *En déduire le signe de* $f'(t)$ *si* $t \notin [0, 3/2]$. *Etudier les variations de* g *sur* $]0, 3/2]$, *en déduire le signe de* f' *puis les variations de* f.

5) Déterminer avec précision les valeurs approchées des extremums de f.

6) Tracer le graphe de f *dans un repère orthonormé avec une échelle de* $2,5$ *cm.*

7) Tracer le graphe de la restriction de f *à* $[0.75, 1.25]$ *avec pour échelle* 20 *cm sur l'axe des* x *et* 100 *cm sur l'axe des* y.

Exercice 1.24 (Un nouvel avatar du théorème de Rolle) *1) Pour tout* x *réel il existe un* θ *dans* $[0, 1]$ *tel que :*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos\theta x \ .$$

2) Montrer que pour $|x|$ *assez petit* θ *est unique. On pose* $\theta = \theta(x)$.

3) Montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Exercice 1.25 *Soit* f *une application* $n-$*linéaire et* $(g_1, \dots, g_n)$ n *applications dérivables. Montrer que* $f(g_1, \dots, g_n)$ *est dérivable et calculer sa dérivée.*

Exercice 1.26 *Calculer* $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^x \sin\sqrt{3}x\right)$. *et* $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{-\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 1.27 *Si* f *est dérivable en* x_0 *alors* $f'(x_0) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{1}{k+h}(f(x_0+h) - f(x_0-k))$. *Le résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus que* h *et* k *tendent vers* 0 *par valeurs supérieures ?*

Exercice 1.28 *Soit* f *une fonction à valeurs complexes, ne s'annulant jamais dans l'intervalle ouvert* I *et dérivable sur cet intervalle. Pour que* $|f|$ *soit croissante il faut et il suffit que* $\mathcal{R}\mathrm{e}(\frac{f'}{f})$ *soit positive ou nulle.*

Exercice 1.29 *Montrer que pour* $n \geq 1$ *il existe un polynôme* P_n *tel que* $\dfrac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$. *Calculer explicitement* P_n *et en déduire, pour* $x > 0$ *:*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin n \arctan\frac{1}{x} \quad .$$

Exercice 1.30 *Soit* f *une fonction numérique* n *fois dérivable. Montrer que :*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(\frac{1}{x})\right) = (-1)^n\left\{\frac{1}{x^{2n}}f^{(n)}(\frac{1}{x}) + \sum_{p=1}^{n-2}\frac{(n-1)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}}\mathrm{C}_n^p f^{(n-p)}(\frac{1}{x}) + \frac{n!}{x^{n+1}}f'(\frac{1}{x})\right\} \quad .$$

Exercice 1.31 *Etablir l'inégalité suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2}e^{|t|}.$$

Exercice 1.32 *Etablir l'inégalité suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*+} \arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 1: *Etablir l'inégalité suivante :*

$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{Très utile!} \quad .$$

Exercice 1.33 *Etablir l'inégalité suivante :*

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t \qquad t \in]1, +\infty[\quad .$$

Exercice 1.34 *Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose $\lim_{t\to+\infty} f'(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}f(t) = l$.*

Exercice 1.35 *On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$. Etablir que P_n a toute ses racines réelles et distinctes.*

Exercice 1.36 *Soit f une application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = a$. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a$.*

Exercice 1.37 *Soit $g \in C^3([0, 2], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g(2) = 0$. Prouver :*

$$\forall x \in [0, 2]\ \exists c \in [0, 2] \quad g(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}g'''(c).$$

Exercice 1.38 *Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$.*

Exercice 1.39 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln f$ soit convexe. Montrer que f est convexe.*

Exercice 1.40 *Etudier $f :\ x \mapsto \frac{x^2-1}{x\ln(x)}$.*

Exercice 1.41 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$, et a, b et c des points distincts de I. Etablir l'existence de $d \in I$ tel que*

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = 2f''(d).$$

Exercice 1.42 *Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels, de degré impair. Déterminer l'ensemble des applications $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(p)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Exercice 1.43 *Soient I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, et $D^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, à valeurs réelles.*
Soit $f \in D^n(I)$, on suppose qu'il existe $a \in I$ tels que $f^{(n)}$ s'annule en a, en changeant de signe. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall g \in D^n(I),\ \|f - g\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \exists b \in I,\ |b - a| \leq \varepsilon \text{ et } g^{(n)}(b) = 0.$$

Exercice 1.44 *1) Soit n un entier, montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout x réel*

$$T_n(\cos x) = \cos nx.$$

2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant. On note a_n ce coefficient dominant et on pose $P_n = \frac{1}{a_n}T_n$.
3) Montrer que P_n possède n zéros distincts que l'on explicitera.
4) Calculer $b_n = \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|$.
5) Montrer que la valeur b_n est atteinte par $|P|$ en p (p à préciser) points $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$. Que vaut $P_n(y_i)$?
6) Soit Q un polynôme unitaire de degré n. On suppose $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| < b_n$. En calculant le signe de $(P_n - Q)(y_i)$ montrer que $P_n = Q$. Conclure.
7) Pour quel choix de $x_0, \ldots, x_n$ dans $[-1, 1]$

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|$$

est-il minimal. Quelle est alors sa valeur ?

8) (indépendante) Exprimer explicitement T_n *en utilisant les formules d'Euler. En déduire une expression des coefficients de* T_n *sous forme de sommes et de coefficients binomiaux.*

9) (indépendante) Montrer que (T_n) *vérifie la relation de récurrence* $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n(X) = 0$*. Retrouver alors le résultat de la question* 2*. Calculer* T_2*,* T_3*,* T_4 *et* T_5*.*

10) (indépendante) Montrer que T_n *est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et que tout polynôme solution de cette équation est proportionnel à* T_n*. En déduire par identification des coefficients le polynôme* T_6*. Plus généralement donner l'expression des coefficients de* T_n*.*

Exercice 1.45 (Morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$) *On se propose de montrer que toute application continue* f *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}^{+*}$*, vérifiant* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f(x + y) = f(x)f(y)$ *est de la forme* $f(x) = e^{ax}$ *pour un* a *bien choisi.*

1) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$*. Montrer que* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ F(x + y) - F(x) = f(x)F(y)$*.*

2) En déduire que f *est de classe* C^1 *et vérifie l'équation différentielle* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f(x + y) - f(x) = f'(x)F(y)$*, puis* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f'(x + y) = f'(x)f(y)$ *et finalement* $f'(x) = f'(0)f(x)$*.*

3) Conclure.

Exercice 1.46 *Partie principale du développement asymptotique en* 0 *de*

$$(\operatorname{sh} x)^{\sin x} - (\sin x)^{\operatorname{sh} x}?$$