Chapitre 3

Topologie des espaces vectoriels normés

3.1 Normes et distances

3.1.1 Norme

Définition 3.1 *Si E est un espace vectoriel réel ou complexe, on appelle norme sur E une application de E vers $\mathbb{R}^+$, notée $\| \|$, N ou tout autre notation semblable, telle que :*
$\forall x \in E \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$
$\forall (x,y) \in E^2 \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|\|)$ s'appelle un espace normé et lorsqu'il n'est pas besoin de préciser la norme, on dit simplement que E est un espace (vectoriel) normé.

On utilisera souvent l'abréviation e.v.n. pour espace vectoriel normé.

Proposition 3.1 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé on a*

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad | \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Définition 3.2 *Un vecteur x de l'espace vectoriel normé (E, N) est dit unitaire si $N(x) = 1$*

Exemple 3.1 *Si E n'est pas réduit à $\{0\}$ et munit d'une norme N , alors, pour tout x de E il existe y unitaire tel que $x = N(x).y$.*

3.1.2 Distance associée

Définition 3.3 *Soit X un ensemble quelconque. On appelle distance sur X une application d de $X \times X$ vers $\mathbb{R}$ telle que*
— $\forall (x,y) \in X^2 \ d(x,y) \geq 0.$
— $\forall (x,y) \in X^2 \ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
— $\forall (x,y) \in X^2 \ d(x,y) = d(y,x)$
— $\forall (x,y,z) \in X^3 \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

La quatrième condition s'appelle l'inégalité triangulaire.

Un ensemble muni d'une distance s'appelle un espace métrique, mais cette notion n'est pas au programme.

Proposition 3.2 *Si (X, d) est un espace métrique on a*

$$\forall (x,y,z) \in X^3 \qquad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Proposition 3.3 *Si E est un espace vectoriel normé alors l'application*

$$d : (x,y) \mapsto \|x - y\|$$

est une distance sur E.

Cette distance s'appelle la distance associée à la norme.

3.1.3 Boules

Définition 3.4 *Soit x_0 un point de E et r un réel positif, on appelle boule ouverte (resp. boule fermée, resp. sphère) de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$B(x_0, r) = \{x \in E; d(x_0, x) < r\}$$

(resp.

$$B'(x_0, r) = \{x \in E; d(x_0, x) \leq r\}$$

$$S(x_0, r) = \{x \in E; d(x_0, x) = r\}\ )$$

Si r est strictement positif on a les inclusions :

$$B'(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset B'(x_0, r) \subset B(x_0, 2r).$$

Proposition 3.4 *Toute boule, ouverte ou fermée est convexe.*

3.1.4 Parties, fonctions bornées, distance à une partie

Définition 3.5 *Une partie A de E est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule.*

Proposition 3.5 *Une partie A de l'e.v.n. E est bornée si et seulement si il existe M tel que $\forall x \in A\ \|x\| \leq M$.*

Définition 3.6 *Une fonction $f : X \to E$ où X est un ensemble quelconque et E un espace vectoriel normé est bornée si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Définition 3.7 *Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ où E un espace vectoriel normé est bornée si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq M.$$

On remarque qu'il s'agit d'un cas particulier de la définition précédente avec $X = \mathbb{N}$.

Définition 3.8 *Soit A une partie non vide de E et x un élément de E. La distance de x à A, notée $d(x, A)$, est le nombre*

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\| = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Ce nombre est bien défini car $\{\|x - y\|, y \in A\}$ est non vide et minoré par 0.
On prendra garde que cette distance n'est pas toujours atteinte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas toujours de y_0 dans A tel que $\|x - y_0\| = d(x, A)$.

3.1.5 Cas d'un espace préhibertien réel

Proposition 3.6 *Si $(E, (.|.))$ est un espace préhilbertien réel alors l'application*

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

est une norme sur E.

Sauf indication contraire tout espace préhilbertien sera supposé muni de cette norme.

3.1.6 Exemples d'espaces vectoriels normés

Exemple 3.2 *Norme $\|\ \|_p$ sur $\mathbb{K}^n$, $p = 1, 2$ et $+\infty$.*

Exemple 3.3 *Norme $\|\ \|_p$, $p = 1, 2$ et $+\infty$, sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Plus généralement

Proposition 3.7 *L'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions bornées définies X à valeurs dans l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E^X.*

Soit f et g deux fonctions bornées par M_f et M_g, alors d'après l'inégalité triangulaire la fonction $f+g$ est bornée par M_f+M_g et la fonction λf par $|\lambda|M_f$ (de plus la fonction nulle est bornée.
En prenant pour X l'ensemble $\mathbb{N}$ on obtient le cas particulier des suites bornées.

Exemple 3.4 *Norme $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{B}(X,E)$.*

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

3.1.7 Produits d'espaces vectoriels normés

Proposition 3.8 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors il est possible de munir $E\times F$ d'une structure d'espace vectoriel normé en choisissant par exemple la norme $\|(x,y)\| = \sup(\|x\|_E, \|y\|_F)$.*

Cette définition peut-être étendue sans difficulté au cas d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ d'espaces vectoriels normés en posant $N\big((x_i)_{i\in I}\big) = \sup_{i\in I}\|x_i\|_{E_i}$.

3.2 Suites

3.2.1 Convergence, divergence

Définition 3.9 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E est convergente si et seulement si il existe un élément L de E tel que :*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \Rightarrow \ \|x_n - L\| < \epsilon.$$

Proposition 3.9 *Si un tel L existe il est unique.*

On l'appelle la limite de (x_n) et on le note $\lim x_n$. (ou mieux : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$).
Vocabulaire : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 3.5 *La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*

Exemple 3.6 *La suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (mais bornée), si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.*

Proposition 3.10 *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 3.11 *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n,1},\dots,u_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un produit $\prod_{i=1}^p E_i$ d'espaces vectoriels normés converge si et seulement chaque suite suite$(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $1\leq i\leq p$ converge. Dans ce cas, si on note $l_i = \lim_{n\to+\infty} u_{n,i}$, on aura $\lim_{n\to+\infty} U_n = (l_1,\dots,l_p)$.*

Exemple 3.7 *Une suite de nombres complexes converge si et seulement si les suites des parties réelles et imaginaires convergent.*

Exemple 3.8 *Dans $M_n(\mathbb{C})$, muni de la norme $\|(m_{i,j})\| = \sup(|m_{i,j}|)$ (on verra ultérieurement que le choix de la norme n'a pas d'importance), une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices est convergente si et seulement pour chaque couple (i,j) la suite $(m_{i,j}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente. De plus :*

$$\lim_{p\to+\infty} M_p = \lim_{p\to+\infty}(m_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq n} = \left(\lim_{p\to+\infty} m_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Théorème 3.1 *L'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui à une suite associe sa limite est une application linéaire.*

3.2.2 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 3.10 *On appelle suite extraite de la suite (u_n) une suite $(u_{\phi(n)})$, où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.*

Vocabulaire 3.1 *On dit que ϕ est une extractrice.*

Exemple 3.9 *Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).*

Une suite extraite de la suite (u_n) se note aussi $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.11 *On appelle valeur d'adhérence d'une suite toute limite d'une suite extraite de cette suite.*

Proposition 3.12 *Toute suite convergente possède une unique valeur d'adhérence : sa limite. En passant à la contraposée : toute suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

Exemple 3.10 *La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence.*

Exemple 3.11 *1 et -1 sont valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemple 3.12 *La suite $(2^{n(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence. Elle n'est pourtant pas convergente.*

Exemple 3.13 (Plus sophistiqué) *: Si $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, tout élément de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3.2.3 Comparaison des normes

Définition 3.12 *Deux normes N_1 et N_2 définies sur un même espace vectoriel sont dites équivalentes si et seulement si il existe α et β dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que*

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x)$$

Certains préfèrent la définition suivante : Deux normes N_1 et N_2 définies sur un même espace vectoriel sont dites équivalentes si et seulement si il existe α et β dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \le \alpha N_2(x) \quad N_2(x) \le \beta N_1(x)$$

Proposition 3.13 *Si une suite est bornée pour la norme N elle est bornée pour toute norme équivalente à N.*

Proposition 3.14 *Si une suite est convergente dans un espace vectoriel muni de la norme N, elle est convergente lorsqu'on munit cet espace d'une norme équivalente à N. De plus elle converge vers la même limite dans les deux cas.*

Exemple 3.14 *Les normes $\| \ \|_p$ sur $\mathbb{K}^n$, $p = 1, 2$ et $+\infty$ sont équivalentes. On verra que ce résultat ce généralise aux espaces de dimension finie.*

Exemple 3.15 *Les normes $\| \ \|_p$, $p = 1, 2$ et $+\infty$, sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, ne sont pas équivalentes.*
En effet considérons la suite $(f_n)_{n\ge 0}$ avec $f_n(t) = \frac{(t-a)^n}{(b-a)^n}$. On a $\|f_n\|_1 = \frac{(b-a)}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{(b-a)}{2n+1}}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.
Il en résulte que $(\sqrt{n} f_n)_{n\ge 0}$ est bornée pour $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ et pas pour $\| \ \|_\infty$, donc $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes, ainsi que $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$.
De même, $(nf_n)_{n\ge 0}$ est bornée pour $\| \ \|_1$ et pas pour $\| \ \|_2$, donc $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ ne sont pas équivalentes

3.3 Topologie d'un espace vectoriel normé

3.3.1 Voisinages d'un point

Définition 3.13 *Une partie V est un voisinage du point x si et seulement si il existe une boule ouverte de rayon non nul de centre x contenue dans V.*

On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 3.15 *Deux normes équivalentes définissent les mêmes voisinages.*

Proposition 3.16 *L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x vérifie les propriétés :*
- *E est un voisinage de x.*
- *Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*
- *Si une partie contient un voisinage de x c'est aussi un voisinage de x.*

3.3.2 Ouverts

Définition 3.14 *Un ouvert est une partie qui est un voisinage de chacun de ses points.*

On parle aussi de partie ouverte.

Exemple 3.16 *Toute boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée d'un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ n'est pas un ouvert.*

Proposition 3.17 *Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.*

Proposition 3.18 *L'ensemble des ouverts de E vérifie les propriétés :*
- *E est un ouvert.*
- *$\emptyset$ est un ouvert.*
- *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
- *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

3.3.3 Fermés

Définition 3.15 *Une partie est un fermé si et seulement si son complémentaire est un ouvert.*

Proposition 3.19 *L'ensemble des fermés de E vérifie les propriétés :*
- *E est un fermé.*
- *$\emptyset$ est un fermé.*
- *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*
- *Toute intersection de fermés est un fermé.*

Exemple 3.17 *Toute boule fermée est un fermé. Toute sphère est un fermé. Toute boule ouverte non vide n'est pas un fermé.*

Proposition 3.20 *Deux normes équivalentes définissent les mêmes fermés.*

3.3.4 Adhérence, intérieur, frontière

Définition 3.16 *On appelle adhérence d'une partie A le plus petit fermé contenant cette partie. C'est l'intersection de tous les fermés contenant A. On la note $\overline{A}$.*

Proposition 3.21 *Deux normes équivalentes définissent la même adhérence d'une partie quelconque.*

Définition 3.17 *Un point de l'adhérence de A s'appelle un point adhérent à A.*

Exemple 3.18 *L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.*

Proposition 3.22 *Une partie est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence.*

Théorème 3.2 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence) *Un point a est adhérent à une partie A d'un espace vectoriel normé si et seulement si il est limite d'une suite d'éléments de A.*

Corollaire 3.1 *L'adhérence d'une partie A de E est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.*

Proposition 3.23 *Une partie A de d'un espace vectoriel normé est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge vers un élément de A.*

Définition 3.18 *On appelle intérieur d'une partie A le plus grand ouvert contenu dans A. C'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A. On le note $\overset{\circ}{A}$.*

Proposition 3.24 *Deux normes équivalentes définissent le même intérieur d'une partie quelconque.*

Exemple 3.19 *L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.*

Proposition 3.25 *Une partie est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.*

Définition 3.19 *Un point d'un partie A est intérieur à A s'il appartient à l'intérieur de A.*

Proposition 3.26 *Un point a est intérieur à A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$, c'est-à-dire si et seulement si A est un voisinage de a.*

Définition 3.20 *La frontière d'une partie A est l'intersection de son adhérence et de l'adhérence de son complémentaire. C'est l'ensemble des points qui sont adhérents à A et à $E - A$.*

Exemple 3.20 *La frontière d'une boule de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r.*

3.3.5 Parties denses

Définition 3.21 *Soient $A \subset B$ deux parties de E. On dit que A est dense dans B si l'adhérence de A contient B. Si $B = E$ on dit tout simplement que A est dense.*

Remarque 3.1 *Une partie A de B est dense dans B si et seulement si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.*

Remarque 3.2 *Une partie A de B est dense dans B si et seulement si pour tout élément b de B et tout $\epsilon > 0$ il existe a dans A tel que $\|b - a\| < \epsilon$.*

Théorème 3.3 *Toutes les notions topologiques définies sur les espaces vectoriels normés sont compatibles avec la relation d'équivalence des normes.*

Ici, par exemple, cela veut dire que si A est dense dans B lorsqu'on munit E de la norme N, elle le reste si on remplace N par une norme N' équivalente.

Nous avons déjà prouvé ce type de résultat pour un certain nombre de notions, nous laissons les justifications ultérieures aux étudiants.

3.3.6 Topologie induite

Définition 3.22 *Si x est élément de A, une partie V de A est un voisinage relatif à A de x si et seulement si il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A \subset V$.*

Proposition 3.27 *Une partie V de A est un voisinage de x relatif à A si et seulement si il existe un voisinage W de x dans E tel que $V = W \cap A$.*

Définition 3.23 *Une partie U de A est un ouvert relatif de A si et seulement si c'est un voisinage relatif à A de chacun de ses points.*

Remarque 3.3 *On dit plus simplement « ouvert de A ».*

Proposition 3.28 *Une partie U de A est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe un ouvert V de E tel que $U = V \cap A$.*

Définition 3.24 *Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si son complémentaire dans A est un ouvert relatif de A.*

Proposition 3.29 *Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si il existe un fermé G de E tel que $F = G \cap A$.*

Proposition 3.30 *Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si la limite de toute suite d'éléments de F qui converge dans A est un élément de F.*

Exemple 3.21 *Par exemple $]0,1]$ est un fermé (relatif) de $]0,2]$ mais pas $[1,2[$.*

3.4 Limites, continuité

3.4.1 Limite d'une application

Définition 3.25 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, a un point adhérent à A, et f une application de A vers un espace vectoriel normé F. f possède une limite en a si et seulement si*

$$\exists \ell \in F \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}\, \forall x \in A\ \|x-a\| < \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \epsilon$$

Dans ce cas il n'existe qu'un tel ℓ qui s'appelle la limite de f en a et se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Définition 3.26 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, non bornée et f une application de A vers un espace vectoriel normé F. On dit que ℓ est la limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\, \exists R \in \mathbb{R}^{*+}\, \forall x \in A\ \|x\| > R \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \epsilon$$

Dans ce cas il n'existe qu'un tel ℓ et il se note $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x)$.

Dans le cas où où E est égal à $\mathbb{R}$, on peut encore raffiner cette définition pour obtenir la notion de limite en $+\infty$ et $-\infty$ par exemple :

Définition 3.27 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non bornée supérieurement et f une application de A vers un espace vectoriel normé F. On dit que ℓ est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\, \exists \mathbb{R} \in \mathbb{R}^{*+}\, \forall x \in A\ x > R \Rightarrow \|f(x)-\ell\| < \epsilon$$

Dans ce cas il n'existe qu'un tel ℓ et il se note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On peut aussi parler de limite infinie en un point a pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.28 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, a un point adhérent à A, et f une application de A vers $\mathbb{R}$. f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si*

$$\forall \mathbb{R} \in \mathbb{R}^{*+}\, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}\, \forall x \in A\ \|x-a\| < \eta \Rightarrow f(x) > R$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

On définirait de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Proposition 3.31 (Caractérisation séquentielle de la limite) *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, a un point adhérent à A, et f une application de A vers un espace vectoriel normé F. f possède une limite ℓ en a si et seulement si pour tout suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Proposition 3.32 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, a un point adhérent à A, et $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une application de A vers un produit d'espaces vectoriels normés $F = \prod_{i=1}^{p} F_i$. f possède une limite ℓ en a si et seulement si chaque f_i possède une limite ℓ_i en a. De plus on aura $\ell = (\ell_i)_{1\leq i\leq p}$.*

Notons $\| \ \|_i$ la norme sur F_i. La norme sur F est, rappelons le, définie par $\|(x_1, \ldots, x_p)\|_F = \sup_{1\leq i\leq p} \|x_i\|$

— Supposons tout d'abord que $\lim_{x\to A} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$. Alors

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\ \exists\eta \in \mathbb{R}^{*+}\ \forall x \in A\ \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \epsilon$$

Or pour tout i $\|f_i(x)-\ell_i\|_i \leq \|f(x)-\ell\|_F$ donc pour tout i :

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\ \exists\eta \in \mathbb{R}^{*+}\ \forall x \in A\ \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f_i(x)-\ell_i\|_i < \epsilon$$

ce qui dit bien $\lim_a f_i = \ell_i$.

— Réciproquement, supposons que pour tout i $\lim_a f_i = \ell_i$. On a donc

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\ \exists\eta_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{*+}\ \forall x \in A\ \|x-a\|_E < \eta_i(\epsilon) \Rightarrow \|f_i(x)-\ell_i\|_i < \epsilon$$

Pour un ϵ donné posons $\eta(\epsilon) = \min_{1\leq i\leq p} \eta_i(\epsilon)$, alors

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\ \exists\eta = \eta(\epsilon) \in \mathbb{R}^{*+}\ \forall x \in A\ \|x-a\|_E < \eta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \epsilon$$

ce qui dit bien $\lim_a f = (\ell_1, \dots, \ell_p)$.

3.4.2 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 3.33 *E, F et a étant définis comme précédemment, l'ensemble des applications $f : A \subset E \to F$ admettant une limite en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A, F)$ et l'application qui à f associe sa limite en a est linéaire.*

Ce résultat reste évidemment valable pour les fonction admettant une limite en $\pm\infty$.

Proposition 3.34 *Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ des applications où E, F et G sont des espaces vectoriels normés, A et B des parties de E et F telles que $f(A) \subset B$. Soit a un point adhérent à A. On suppose que $\ell = lim_a f$ existe, que ℓ est adhérent à B et que $\ell' = \lim_\ell g$ existe. Alors $g \circ f$ admet une limite en a égale à ℓ'. En résumé :*

$$\lim_a g \circ f = \lim_{\lim_a f} g.$$

3.4.3 Continuité en un point

Définition 3.29 *Une application $f : A \to F$ est continue en un point a de A si et seulement si elle admet une limite en ce point. Cette limite ne peut alors être que $f(a)$.*

Proposition 3.35 (Caractérisation séquentielle) *Une application $f : A \to F$ est continue en un point a de A si et seulement si pour tout suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A tendant vers a la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ tend vers $f(a)$.*

Ce résultat découle directement du résultat sur la caractérisation séquentielle de la limite.

Exemple 3.22 *Si f est définie sur une partie A stable par f et si la suite définie par $u_0 \in A$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ converge vers une limite ℓ appartenant à A et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.*

3.4.4 Applications continues

Définition 3.30 *Une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F, est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A.*

3.4.5 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Proposition 3.36 *Si A est une partie de l'espace vectoriel normé E, si F est un espace vectoriel normé, l'ensemble noté $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues sur A à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A, F)$.*

3.4.6 Continuité d'une application composée

Théorème 3.4 *Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E vers l'espace vectoriel normé F. Soit g une application d'une partie B de F vers un espace vectoriel normé G. On suppose $f(A) \subset B$. Soit x un point de A.*

- *Si f est continue en x et g continue en $f(x)$ alors $g \circ f$ est continue en x.*
- *Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

3.4.7 Image réciproque d'un ouvert

Proposition 3.37 *Une application f d'une partie A d'un espace vectoriel normé E, vers un espace vectoriel normé F, est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. un fermé) de A.*

On rappelle qu'un ouvert de A est l'intersection de A et d'un ouvert de E.

Remarque 3.4 *l'image directe d'un ouvert (resp. un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé).*

Cette proposition sert beaucoup pour prouver que des parties d'un espace vectoriel normé sont ouvertes ou fermées.

Exemple 3.23 *La continuité du déterminant permet d'affirmer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert, que $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé. La continuité de la norme permet de retrouver rapidement que la boule ouverte est ouverte, la boule fermée et la sphère sont fermées.*

3.4.8 Extension par continuité

Proposition 3.38 *Deux fonctions continues de A vers F égales sur une partie B de A dense dans A sont égales (sur A).*

3.4.9 Application uniformément continue, application lipschitzienne

Définition 3.31 *Une application f, d'une partie A d'un espace vectoriel normé E vers un espace vectoriel normé F est uniformément continue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Remarquer la différence peu visible (permutation de quantificateurs), mais très importante, entre la définition de la continuité en tout point et la définition de l'uniforme continuité :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in A \ \forall y \in A \quad \|x-y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

et

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall x \in A \ \exists \eta > 0 \ \forall y \in A \quad \|x-y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Proposition 3.39 *La continuité uniforme implique la continuité, mais la réciproque est fausse*

La continuité uniforme implique la continuité car logiquement

$$\exists \eta \ \forall x \ P(x,\eta) \Longrightarrow \forall x \ \exists \eta \ P(x,\eta).$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue.

Définition 3.32 *Une application $f = A \subset E \to F$ est lipschitzienne*[1] *si et seulement si il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall (x,y) \in A^2 \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E.$$

Remarque 3.5 *On parle parfois de fonction k-lipschitzienne pour être plus précis.*

Proposition 3.40 *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.*

Exemple 3.24 *La norme est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue.*

Exemple 3.25 *Si A est une partie non vide l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne donc continue.*

1. Rudolph LIPSCHITZ, 1832-1903, allemand

3.4.10 Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 3.5 *Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^{*+} \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Corollaire 3.2 *Une application linéaire d'un e.v.n. vers un autre est continue si et seulement si elle est lipschitzienne.*

Exemple 3.26 *Munissons l'espace vectoriel des applications de classe C^1 sur $[a,b]$, à valeurs réelles de la norme $\|f\| = \sup|f(x)|$. Alors les applications $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ et $f \mapsto f(a)$ sont des aplications linéaires continues, mais $\phi : f \mapsto f'(1)$ n'est pas continue car la suite $\left(f_n = \frac{1}{n}t^n\right)_{n\geq 1}$ converge vers zéro pour $\| \ \|$, mais la suite $(\phi(f_n))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0.*

Proposition 3.41 *L'ensemble des applications linéaires continues de E vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$, noté $\mathcal{L}_c(E,F)$.*

3.5 Compacité

Définition 3.33 *Une partie K d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si de tout suite d'éléments de K on peut extraire une suite qui converge vers un élément de K.*

Remarque 3.6 *Cette caractérisation s'appelle la caractérisation de Bolzano*[2]*-Weierstrass*[3]*.*

Remarque 3.7 *Il résulte de cette définition que si une partie est compacte pour une norme elle le reste pour toute norme équivalente.*

On dit aussi que K est un compact de E.

Proposition 3.42 *Toute partie compacte est fermée.*

Proposition 3.43 *Toute partie compacte est bornée.*

Il existe des espaces vectoriels normés dans lesquels certaines parties fermées et bornées ne sont pas compactes ; on verra ultérieurement que dans tout espace vectoriel normé de dimension finie les compacts sont les parties fermées et bornées.

Proposition 3.44 *Si A est une partie compacte de E et B une partie compacte de de F alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$. Plus généralement, un produit fini d'une famille finie de compacts est un compact le l'espace produit.*

Théorème 3.6 *De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ on peut extraire une suite convergente.*

On suppose qu'ils sont munis de la norme $x \mapsto \|x\| = \sup|x_i|$. En toute rigueur cette hypothèse aurait du faire partie du théorème. Mais on verra ultérieurement que ce théorème reste valable pour toute norme, autant l'énoncé tout de suite sous sa forme générale. Néanmoins nous aurons besoin de ce théorème dans ce cas particulier pour pouvoir démontrer le résultat dans la cas général, c'est la raison pour laquelle il nous faut l'énoncer deux fois.

Ce théorème est un cas particulier du théorème de *Bolzano*[4] $-$ *Weierstrass*[5].

Fin de la démonstration du théorème.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On sait que de toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une suite convergente. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}^n$. On note $u_p = (u_{1p}, \ldots, u_{np})$. On rappelle qu'une telle suite est convergente si et seulement si chaque suite $(u_{ip})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Supposons simplement $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ bornée. Alors chaque suite $(u_{ip})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par application d'un des lemmes précédents on peut extraire de $(u_{1p})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente $(u_{1\phi_1(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_{2\phi_1(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée on peut en extraire une suite convergente $(u_{2\phi_1(\phi_2(p))})_{p\in\mathbb{N}}$. On réitère ce procédé jusqu'à la n-ième composante.

Pour tout i la suite $(u_{i\phi_1(\cdots\phi_n(p))})_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $(u_{i\phi_1(\cdots\phi_i(p)\cdots)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui est convergente. Elle reste convergente. Finalement si $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n$ la suite $(z_{\phi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Théorème 3.7 *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (munis de la norme $\sup$) sont les parties fermées et bornées.*

Théorème 3.8 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un compact K admettant une unique valeur d'adhérence alors elle converge.*

2. BOLZANO Bernhard, 1781-1848, Tchèque
3. WEIERSTRASS Karl, 1815-1897, Allemand
4. BOLZANO Bernhard, Prague 1781 - Prague 1848
5. WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm, Osterfelde (Westphalie) 1815 - Berlin 1897

3.6 Applications continues sur une partie compacte

Théorème 3.9 *L'image de toute partie compacte par une application continue est compacte.*

Théorème 3.10 *Toute fonction continue sur un compact, à valeurs réelles, est majorée et minorée, et ses bornes supérieure et inférieure sont atteintes.*

Corollaire 3.3 *Toute fonction continue sur un compact est bornée et la borne supérieure de sa norme est atteinte.*

Théorème 3.11 *(Heine[6])Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

3.7 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 3.12 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Si E est réduit à $\{0\}$ le résultat est vrai (mais sans grand intérêt).
Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension n, $n \geq 1$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty) & \to & (E, N) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1^n} x_i e_i \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. On va montrer que cette application est un homéomorphisme, c'est-à-dire qu'elle est bijective (on le sait déjà), continue et sa fonction réciproque est continue.
On en déduit que si N' est une autre norme sur E l'application

$$\theta = \varphi' \circ \varphi^{-1} \quad : \quad \begin{array}{ccc} (E, N) & \to & (E, N') \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

, où φ' est défini similairement à φ, est continue ainsi que sa réciproque. N' et N sont donc équivalentes (par exemple, la continuité de l'application linéaire θ donne l'existence d'un constante α tel que $\forall x \in E \ N'(x) = N'(\theta(x)) \leq N(x))$.
On a

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad N(\varphi(x)) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i) \right) \|x\|_\infty.$$

Ceci prouve que l'application linéaire ϕ est continue.
Soit S la sphère de rayon 1 et de centre 0 dans $\mathbb{K}^n$ muni de $\| \ \|_\infty$). C'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$ muni de $\| \ \|_\infty$). C'est donc un compact. Puisque φ est continue, ainsi que N, $N \circ \varphi$ atteint donc un minimum m sur S. Ce minimum est non nul puisque φ est bijective, donc injective, et ne s'annule pas sur S ; $m = N(\varphi(x_0)) > 0$.
Soit x non nul dans E alors $y = \frac{1}{\|x\|_\infty} x$ appartient à S. Donc $N(\phi(y)) \geq m$. Par homogénéité de N et φ on obtient

$$N(\varphi(x)) \geq m \|x\|_\infty,$$

ce résultat étant clairement valable pour $x = 0$.
Il ne reste plus qu'à substituer $\varphi^{-1}(y)$ à x pour obtenir

$$\forall y \in E \quad \|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{m} N(y),$$

ce qui exprime la continuité de l'application linéaire φ^{-1}.

Théorème 3.13 *Dans un espace de dimension finie toutes les notions topologiques sont indépendantes de la norme choisie.*

On a déjà fait remarquer plusieurs fois que ces notions étaient indépendantes de la norme choisie dans une classe d'équivalence de normes. Or ici il n'y a qu'une seule classe.

Théorème 3.14 *Si f est une application linéaire de E vers F et si E est de dimension finie, alors f est continue.*

6. HEINE (1872) Eduard Heinrich, Berlin 1821 -Halle 1881

Toutes les normes sur E sont équivalentes. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on choisit $N(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Puisque $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ on en déduit, à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\|f(x)\|_F \leq (\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F) N(x).$$

Ceci prouve la continuité de l'application linéaire f.

Théorème 3.15 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie les parties compactes sont les parties fermées et bornées*

On peut choisir sur E la norme N définie à la question précédente et calquer la démonstration vue dans le cas de $\mathbb{K}^n$.
On peut aussi transporter le résultat sur $\mathbb{K}^n$ à l'aide de la fonction φ, car puisque φ et φ^{-1} sont des applications linéaires continues, une partie A de E est compacte (resp. fermée, resp. bornée) si et seulement si $\varphi^{-1}(A)$ est compacte (resp. fermée, resp. bornée).
Réciproque : Théorème de Riesz [7]

Corollaire 3.4 *Dans un espace de dimension finie, de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

On choisit une norme quelconque (elle sont toutes équivalentes). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in \overline{B}(0, M)$. Or $\overline{B}(0, M)$ est compact car fermé et borné. Donc on peut extraire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge (dans $\overline{B}(0, M)$).
On remarquera que ce corollaire est équivalent au théorème dont il découle.

Proposition 3.45 *Dans un espace de dimension finie une suite bornée converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.*

On vient de voir que toute suite bornée est à valeur dans une boule fermée qui est compacte. On applique alors le résultat sur les suites à valeurs dans un compact.

Théorème 3.16 *Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, a un point adhérent à A. On peut écrire de manière unique $f = f_1\, e_1 + \cdots + f_n\, e_n$ où les f_i sont des applications de A vers $\mathbb{K}$. Avec ces notations, la fonction f est continue sur A (resp. admet une limite en a) si et seulement si chaque f_i est continue sur A (resp. chaque f_i possède une limite en a, et dans ce cas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \to a} f_i(x)\, e_i.$$

Ce théorème peut être étendu aux suites à valeurs dans un espace de dimension finie, ou aux limites en $+\infty$ et $-\infty$

Exemple 3.27 *Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On écrit $M_p = (m_{i,j}^{(p)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Cette suite converge si et seulement si pour tout couple (i, j) la suite $(m_{i,j}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge. De plus si on note $m_{i,j} = \lim_{p \to +\infty} m_{i,j}^{(p)}$ on a $\lim_{p \to +\infty} M_p = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.*

Définition 3.34 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une application f de E vers $\mathbb{K}$ est dite polynomiale si et seulement si il existe une base de E telle que f appartienne à la sous-algèbre engendrée par les fonctions coordonnées.*

On peut vérifier que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de f et pas de la base choisie.

Théorème 3.17 *L'ensemble des fonctions polynomiales est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions numériques continues.*

Par stabilité des opérations algèbriques vis-a-vis des opérations algébriques, il suffit de montrer que les fonction coordonnées sont continues. Or elles sont linéaires, et toute application linéaire d'un espace de dimension finie est continue.

7. RIESZ Frigyes, Gyor 1880 - Budapest 1956

Exemple 3.28 *Un cas particulièrement usuel est celui des applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$. Une application f est polynomiale si et seulement si il existe une famille finie I de n-uplets d'entiers $(p_{1,i},\dots,p_{n,i})_{i\in I}$ et une famille de scalaires $(a_i)_{i\in I}$ telles que*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i\in I} a_i\, x_1^{p_{1,i}}\cdots x_n^{p_{n,i}}.$$

On note usuellement x_i l'application $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$.

Exemple 3.29 *La fonction* det *est une fonction continue sur $M_n(\mathbb{K})$ car polynomiale. On a déjà utilisé ce résultat plusieurs fois.*

Théorème 3.18 *Si B est une application bilinéaire de $E\times F$ vers G et si E et F sont de dimension finie, alors B est continue.*

3.8 Connexité par arcs

Définition 3.35 *Si A est une partie d'un espace normé, un chemin continu dans A est une application continue d'un segment $[a,b]$ vers A.*

Les images $M=\Gamma(a)$ et $N=\Gamma(b)$ s'appellent les extrémités du chemin $\Gamma:[a,b]\to A$. On dit aussi que le chemin Γ joint les points M et N.

Définition 3.36 *Une partie A d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent toujours être joints par un chemin continu(dans A).*

Théorème 3.19 *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Ce résultat peut s'étendre un peu.

Proposition 3.46 *Dans un espace vectoriel normé, toute partie convexe est connexe par arcs.*

En particulier, toutes les boules, ouvertes ou fermées, sont connexes par arcs.

Définition 3.37 *Une partie A de E est étoilée s'il existe un point M_0 de A tel que pour tout M de A le segment $[M_0,M]$ est contenu dans A.*

Exemple 3.30 *Une partie convexe non vide est étoilée, mais la réciproque est fausse, par exemple $\mathbb{R}-\{(x,0),x<0\}$ est étoilée par rapport à $(0,0)$ mais n'est pas convexe.*

Proposition 3.47 *Une partie étoilée est connexe par arcs.*

Exemple 3.31 $\mathbb{C}^*$ *est connexe par arcs, mais n'est pas étoilé.*

Théorème 3.20 *L'image d'un ensemble connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.*

Proposition 3.48 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image par une application continue à valeurs réelles d'un ensemble connexe par arc est un intervalle.*

Exemple 3.32 *Il résulte de ceci que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car l'image de cet ensemble par* det *est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle. On peut en revanche montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

3.9 Exercices et problèmes

Exercice 3.1 *Deux normes sont équivalentes si et seulement toute boule ouverte non vide pour une chacune des normes contient une boule ouverte non vide pour l'autre norme.*

Exercice 3.2 (Caractérisation topologique de l'adhérence) *Un point x est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x intersecte A.*

Exercice 3.3 (Caractérisation topologique de l'adhérence) *Un point x est adhérent à A si et seulement si pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ intersecte A.*

Exercice 3.4 (Caractérisation métrique de l'adhérence) *Un point x est adhérent à A si et seulement si $d(x, A) = 0$. La distance de x à A, notée $d(x, A)$ est égale à $\inf_{y \in A} \|x - y\|$.*

Exercice 3.5 *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{inv} & : & GL_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$

est continue.

Exercice 3.6 *La base canonique de l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ est la famille $(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p^n})$, indexée par $\mathbb{N}^n$. Montrer qu'il s'agit bien d'une base de l'algèbre des fonctions polynomiales.*

Exercice 3.7 *L'espace $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arc.*