Chapitre 4

Séries numériques et vectorielles

4.1 Séries à valeurs dans un espace normé.

Définition 4.1 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v. E. On appelle série de terme général u_n, le couple de suites* $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (S_n(u))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Remarque : une telle série est souvent simplement notée $\sum_{n\geq 0} u_n$, le programme préconise la notation $\sum u_n$. Notation que je n'apprécie pas car elle ne permet pas de travailler avec les séries définies à partir d'un certain rang :

$$\sum_{n\geq n_0} u_n = ((u_n)_{n\geq 0}, (S_n(u))_{n\geq n_0} = (\sum_{i=n_0}^{n} u_i)_{n\geq n_0}).$$

D'autre part, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on écrit S_n au lieu de $S_n(u)$

La suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. S_n est la somme partielle d'ordre n.

Proposition 4.1 *L'ensemble des séries est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}})^2$. De plus $\lambda\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$.*

Proposition 4.2 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & E^{\mathbb{N}} & \to & E^{\mathbb{N}} \\ & & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (S_n(u))_{n\geq 0} \end{array}$$

est un automorphisme de $E^{\mathbb{N}}$. La bijection réciproque associe à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Définition 4.2 *Si la suite $(S_n(u))_{n\geq 0}$ est convergente, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. Si a est la limite de la suite $(S_n(u))_{n\geq 0}$, on écrit : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a$, a est la somme de la série.*

Remarque : Il ne faut pas confondre la série, qu'il faut s'efforcer de noter $\sum_{n\geq 0} u_n$, et sa limite, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ quand elle existe.

Un exemple de série convergente : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Autre exemple de série convergente : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Vocabulaire : Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.
Deux exemples de séries divergentes : La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$.

Proposition 4.3 *Si une série converge son terme général tend vers zéro. Mais la réciproque est fausse.*

En effet la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{k}$ est divergente mais son terme général tend vers 0

Définition 4.3 *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $l = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, l'élément $R_n(u) = l - S_n(u) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, s'appelle le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.*

Remarque 4.1 *On voit ici l'intérêt de pouvoir parler de séries commençant à un indice distinct de 0. $R_n(u)$ est la somme de la série convergente $\sum_{k\geq n+1} u_k$.*

Proposition 4.4 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement l'une des séries $\sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$ ou $\sum_{n\geq 1} u_n - u_{n-1}$ converge.*

On verra que ce procédé est très utile pour établir la convergence d'une suite quand on ne peut pas calculer explicitement sa limite.

Proposition 4.5 *L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.*

Définition 4.4 *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente.*

Théorème 4.1 *Toute série absolument convergente à valeurs dans un espace de dimension finie est convergente.*
De plus si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série absolument convergente et convergente alors

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Remarque : La réciproque est fausse. Il n'est pas nécessaire qu'une série soit absolument convergente pour être convergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente . On parle de série semi-convergente.

4.2 Séries de nombres réels positifs

De nombreux résultats qui suivent ont été vu en première année. Mais il ne m'a pas paru inutile d'en parler à nouveau, tant ils sont importants.

4.2.1 Critères et règles de convergence

Définition 4.5 *Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs si les u_n sont des réels positifs. On définit de même les séries à termes négatifs.*

Proposition 4.6 *Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs converge si et seulement si il existe un réel (positif) M tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

Une série à termes positifs est donc convergente si ses sommes partielles sont majorées.
Remarque : Pour qu'une série à termes négatifs converge il faut et il suffit que les sommes partielles soient minorées.

Théorème 4.2 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs . On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. Alors :*
si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ,
si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge .

De plus, dans le cas où les deux séries convergent, on aura : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Proposition 4.7 *L'ensemble des séries à valeurs dans l'espace vectoriel E, absolument convergentes, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à valeurs dans E.*

En effet il est clair que la série de terme général nul est absolument convergente.
Ensuite, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries absolument convergentes et si λ et μ sont deux scalaires alors pour tout n

$$0 \leq \|\lambda u_n + \mu v_n\| \leq |\lambda|\|u_n\| + |\mu|\|v_n\|.$$

Or, par linéarité de la sommation $\sum_{n\geq 0} |\lambda|\|u_n\| + |\mu|\|v_n\|$ converge. Par majoration $\sum_{n\geq 0} \|\lambda u_n + \mu v_n\|$ converge.

Proposition 4.8 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs . On suppose : $(u_n) = \mathcal{O}(v_n)$. Alors :*
si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ,
si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge .

Proposition 4.9 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs . On suppose : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors : $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*

Remarque : Ces théorèmes reste vrais pour des séries à termes négatifs (il suffit de considérer les opposées de ces suites). Mais il sont faux pour des séries dont le terme général n'est pas de signe constant.

Remarque pratique : Dans le deuxième théorème il suffit de supposer que la suite v_n est positive , puisque $(u_n) \sim (v_n)$ implique qu'à partir d'un certain rang u_n et v_n sont de même signe.

Proposition 4.10 *La série $\sum_{n\geq 0} k^n$, k réel positif , s'appelle la série géométrique de raison k. Elle converge si et seulement si $k < 1$. On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$*

Théorème 4.3 Règle de D'Alembert [1] *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes* **strictement positifs** . *On suppose que* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k$ *existe , alors :*
si $k < 1$ la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ,
si $k > 1$ la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge ,
si $k = 1$ on ne peut pas conclure.

Lemme 4.1 (Critère de comparaison logarithmique.) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un n_1 tel que pour tout n plus grand que n_1 on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors $(u_n) = \mathcal{O}(v_n)$, c'est-à-dire la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n).*

Définition 4.6 (Définition de l'exponentielle complexe) *Pour tout z complexe la série*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

est absolument convergente donc convergente. L'application

$$\begin{array}{rcccl} \exp & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

s'appelle la fonction exponentielle. L'image par cette application d'un élément z se note $\exp(z)$ *ou* e^z.

Définition 4.7 (Définition de l'exponentielle d'une matrice) *Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ la série*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

est absolument convergente donc convergente, car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. La somme de cette série s'appelle l'exponentielle de la matrice A et se note $\exp(z)$ *ou* e^z.

1. d'ALEMBERT Jean le Rond, Paris 1717-Paris 1783

Définition 4.8 *On appelle série de Riemann*[2] *une série du type* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ *, où* α *est un réel (positif).*

Théorème 4.4 *La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *.*

Démonstration en utilisant la comparaison avec une intégrale.

Théorème 4.5 *Soit* $f : [n_0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux, décroissante sur* $[n_0, +\infty[$*. Alors la série* $\sum_{n\geq n_0+1}\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ *converge. En particulier* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ *et* $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ *sont de même nature.*

Remarque : peut aussi, sous les mêmes hypothèses, affirmer que que la série $\sum_{n\geq n_0} f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)$ converge.
Démonstration du théorème :
La continuité par morceaux permet de justifier l'existence de $\int_{n-1}^n f(t)dt$.
Posons pour $n \geq n_0+1$ $u_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$. En utilisant la décroissance de f sur $[n, n+1]$ et la croissance de l'intégrale on peut écrire, pour tout $n \geq n_0+1$:

$$f(n) = \int_{n-1}^n f(n)dt \leq \int_{n-1}^n f(t)dt \leq \int_{n-1}^n f(n-1)dt = f(n-1).$$

On en déduit , pour tout $n \geq n_0+1$:

$$0 \leq u_n \leq f(n-1) - f(n),$$

puis par sommation (et en exploitant une somme télescopique) :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} u_n \leq f(n_0) - f(N) \leq f(n_0).$$

La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est donc une série à termes positifs dont les sommes partielles sont bornées. Elle est donc convergente.
Fin de la démontration du théorème :
Un condition nécessaire pour que la série de Riemann converge est que $\alpha > 0$, sinon son terme général ne tend pas vers 0.
On suppose donc $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduite que la série $\sum_{n\geq 2}\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge c'est à dire que la suite

$$\left(\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 2}$$

converge.
En notant ℓ_α la limite de cette suite, et en rajoutant 1 à la somme on a donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt - \ell_\alpha + 1 + \circ(1).$$

Si $\alpha = 1$ on obtient le célèbre résultat :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1).$$

γ s'appelle la constante d'Euler.
Si $\alpha \neq 1$ on aura :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} + c_\alpha + \circ(1),$$

avec $c_\alpha = -\frac{1}{1-\alpha} - \ell_\alpha + 1$.
Ceci montre que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Dans le cas où $\alpha < 1$ on obtient un développement asymptotique à deux termes de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$, sans néanmoins avoir d'expression explicite pour la constante c_α.

2. RIEMANN Bernhard Georg Friedrich, Breselenz (près de Hanovre) 1826- Selasca (Italie) 1866

Remarque : la comparaison à une intégrale peut aussi être utilisée pour obtenir des équivalents de restes de séries convergentes, où des équivalents de somme de séries divergentes (même dans le cas où f est croissante).

A titre de premier exemple, cherchons un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$. Pour tout $k \geq n+1$ on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En sommant, et en utilisant la relation de Chasles, on en déduit que pour tout $N \geq n+1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(N)^{\alpha-1}}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit qu'un équivalent de ce reste est $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. L'application de l'égalité des accroissement finis à $\phi : t \mapsto \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ montrer même qu'il existe c dans $]n, n+1[$ tel que

$$R_n = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{c^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^\alpha}).$$

Comme deuxième exemple cherchons un équivalent de $\ln n!$.

La fonction $x \mapsto lnx$ est croissante sur $[1, +\infty[$, on a donc, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall k \in [2, n] \quad \ln k \geq \int_{k-1}^k \ln t \, dt,$$

et

$$\forall k \in [1, n-1] \quad \ln k \geq \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

En sommant et en appliquant la relation de Chasles, il vient :

$$\int_1^n \ln t \, dt + \ln 1 \leq \ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^n \ln t \, dt + \ln n.$$

(on remarquera l'intérêt d'avoir isolé les termes extrémaux dans la minoration et la majoration pour avoir une intégrale indéfinie qui soit la même de chaque côté et surtout qui soit une fonction de n, afin d'obtenir un équivalent plus élégant.)

Finalement :

$$n \ln n - n \leq \ln n! \leq n \ln n - n + \ln n.$$

On en déduit $\ln n! \sim n \ln n$ et même le développement asymptotique plus précis

$$\ln n! = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n).$$

Ce développement n'est malheureusement pas encore assez précis pour permettre de passer à l'exponentielle pour obtenir un équivalent de $n!$.

En regroupant le théorème sur l'usage des équivalents et le théorème sur la série de Riemann on obtient la règle suivante, qui peut être utilisée sans justification, même si elle n'est pas officiellement au programme.

Proposition 4.11 (Règle de Riemann) *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs .*

Si $(u_n) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^\alpha})$ *, avec* $\alpha > 1$ *, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Si $(u_n) = \circ(\frac{1}{n^\alpha})$ *, avec* $\alpha > 1$ *, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Si $(\frac{1}{n^\alpha}) = \mathcal{O}(u_n)$ *, avec* $\alpha \leq 1$ *, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge .*

Si $(u_n) \sim (\frac{k}{n^\alpha})$ *, avec* $k \neq 0$ *, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

4.2.2 Sommation des relations de comparaison

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries de nombres réels . On note $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Proposition 4.12 *On suppose :* $(u_n) = \mathcal{O}(v_n)$ *. Alors :*
si v_n est positif à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$,
si u_n et v_n sont positifs à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge et $S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v))$.

Proposition 4.13 *On suppose :* $(u_n) = \circ(v_n)$ *. Alors :*
si v_n est positif à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $R_n(u) = \circ(R_n(v))$,
si u_n et v_n sont positifs à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge et $S_n(u) = \circ(S_n(v))$.

Proposition 4.14 *On suppose :* $(u_n) \sim (v_n)$ *. Alors :*
si v_n est positif à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $R_n(u) \sim (R_n(v))$,
si u_n est positif à partir d'un certain rang et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge et $S_n(u) \sim (S_n(v))$.

4.2.3 Exemples d'application des techniques précédentes

Ces applications font l'objet d'exercices et de devoirs.

4.2.3.1 La formule de Stirling

Enoncé de la formule de Stirling [3]. Intégrales de Wallis [4]

La formule de Stirling est au programme et doit être connue.

Proposition 4.15 *On à l'équivalent suivant pour la fonction* `factorielle` *:*

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Choisissez l'éciture que vous préférez ! Vous aurez compris que c'est la première ma préférée.

Exercice 1:

1) On pose $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$. Notons $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. Montrer que $v_n = \frac{a}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \ln u_{n+1} - \ln u_n$ est convergente puis qu'il existe un c non nul tel que $n! \sim c\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

2) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire l'expression de I_{2n} et de I_{2n+1} à l'aide de $n!$ et $(2n)!$.

3) Prouver que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En déduire $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

4) Prouver finalement la formule de Stirling [5] :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad .$$

5) Soit l la limite de $\ln u_n$. Prouver qu'il existe un réel b tel que $l - \ln u_n = \frac{b}{n} + \circ(\frac{1}{n})$.

6) En déduire :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \circ(\frac{1}{n})\right) \quad .$$

4.2.3.2 Séries de Bertrand

Définition 4.9 *On appelle série de Bertrand* [6] *une série de la forme*

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}.$$

3. STIRLING James, 1692-1771 anglais. Cette formule apparaîtrait à la page 137 de son ouvrage *Methodus differentialis* daté de 1730.
4. WALLIS John, Ashford 1616 - Oxford 1703, anglais
5. Stirling James. 1692-1770, anglais.Cette formule apparaîtrait à la page 137 de son ouvrage *Methodus differentialis*, daté de 1730.
6. BERTRAND Joseph Louis François, Paris 1822- Paris 1900, français

Exercice 2:
On appelle série de Bertrand une série de la forme
$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}.$$

1) Comparer pour la relation de prépondérance les suites $(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha})_{n\geq 2}$ et $(\frac{1}{n^\gamma})_{n\geq 2}$, en distinguant les cas $\alpha < \gamma$, $\alpha > \gamma$ et $\alpha = \gamma$.
2) En déduire que si $\alpha > 1$ la série diverge, si $\alpha < 1$ la série converge.
3) En comparant avec une intégrale, étudier la convergence de la série lorsque $\alpha = 1$.

4.2.3.3 Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 3:
1) Rappeler les définitions de $(u_n) = \circ(v_n)$ et $(u_n) \sim (v_n)$.
2) On suppose que $(u_n) = 1 + \frac{\alpha}{n} + \circ(\frac{1}{n})$. Montrer que si $\alpha > 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n > 1$, et que si $\alpha < 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n < 1$.
3) On se donne deux suites à termes strictement positifs (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge il en est de même de $\sum_{n\geq 1} u_n$. Et énoncer la contraposée de cette proposition.

On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$, pour un réel α. On s'intéresse à la convergence de cette série. Si β est un réel,on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

4) Prouver qu'il existe un réel γ tel que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \dfrac{\gamma}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$.
5) En vous servant des questions précédentes montrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, et qu'elle diverge si $\alpha < 1$. C'est la règle de Raabe [7]-Duhamel [8]
6) Montrer que, en exprimant les trois premiers termes du développement asymptotique de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, que les deux suites suivantes vérifient le critère pour $\alpha = 1$: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$. Montrer que les deux séries associées à ces suites ne sont pas de même nature. Que peut-on en conclure ?

On suppose maintenant que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^2})$, pour un réel α, et l'on va essayer de préciser le comportement de (u_n). On choisit $\beta = \alpha$.

7) Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.
8) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$ est convergente et que la suite (w_n) converge vers un réel c non nul.
9) Donner finalement un équivalent de (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.
10) Appliquer la méthode à la série de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^p+1)^n}\,dx$, $p \geq 2$. On établira pour cela une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
11) Avec les mêmes notations que dire de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n I_n$?

4.3 Séries de nombres réels ou complexes

4.3.1 Séries absolument convergentes

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ étant des espaces vectoriels de dimension finie. Toutes série absolument convergente est convergente.

7. RAABE Joseph Ludwig, 1801- Zurich 1859
8. DUHAMEL Jean-Marie Constant, Saint-Malo 1897- Paris 1872

Méthode : Pour montrer qu'une série de nombre réels ou complexes est convergente il suffit de prouver qu'elle est absolument convergente . Pour prouver que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente il suffira d'appliquer à $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ un des critères précédents.

4.3.2 Séries alternées

Définition 4.10 *Une série $\sum u_n$ de nombres réels est dite alternée si et seulement si la suite $(-1)^n u_n$ garde un signe constant. Une série alternée est donc de la forme $\sum(-1)^n u_n$ ou $\sum(-1)^{n-1} u_n$ où (u_n) est une suite positive.*

Théorème 4.6 (Règle de Leibniz[9] ou Critère Spécial des Séries Alternées) *La série alternée $\sum(-1)^n u_n$ ou $\sum(-1)^{n-1} u_n$ où (u_n) est une suite positive décroissante tendant vers zéro est convergente .*

Démonstration :
On suppose que pour tout entier n $(-1)^n u_n \geq 0$, l'autre cas se déduit de celui-ci en remplaçant $(u_n)_{n\geq 0}$ par $(-u_n)_{n\geq 0}$.
Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Il s'agit de prouver que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
Pour n entier on a

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_n &= u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0 \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0 \\ S_{2n} - S_{2n+1} &= |u_{2n+1}| \end{aligned}$$

Théorème 4.7 *Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $|u_n|$ tende vers zéro en décroissant. Cette série converge et l'on a :*

$$|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|.$$

Il résulte de cela que $(S_{2n})_{n\geq 0}$ est décroissante, $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est crossante et $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\geq 0}$ tend vers 0. Les deux suites $(S_{2n})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Elles converge vers la même limite. Finalement $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
De plus, pour tout entier n, on peut écrire, en notant S la somme de la série, on peur écrire

$$0 \leq u_0 + u_1 = S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \leq S_0 = u_0.$$

On aura

$$|S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = |u_{2n+1}|$$

et

$$|S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} - S \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = |u_{2n+2}|,$$

ce qui se résume bien en $|R_n| = |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.
Remarque : On a obtenu au passage : Toute somme partielle d'une série vérifiant le critère de Leibniz est comprise entre le premier terme et la somme du premier et du second. En particulier, elle est du signe du premier terme.

4.3.3 La transformation d'Abel

Cette technique permettant la convergence d'un certain type de séries n'est pas au programme.

Exercice 4:
1) Soit θ un réel dans $]0, 2\pi[$. Calculer

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) \text{ et } C_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

2) Montrer que les suites $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ et $(C_n(\theta))_{n\geq 1}$ sont bornées.
3) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres complexes. Soit, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k a_k = \epsilon_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k.$$

4) En déduire que si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée et si la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels qui tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum_{n\geq 1} \epsilon_n a_n$ est convergente.

5) En appliquant la même transformation donner une majoration de $|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \epsilon_k a_k\right|$.

6) Dans le cas où $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge la suite de ses sommes partielles converge. Que donne la majoration du reste lorsqu'on écrit $u_n = R_{n-1}(u) - R_n(u)$? Le résultat est-il intéressant ?

7) Déduire des résultats précédents que si $\theta \in]0, 2\pi[$, les séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n}$$

sont convergentes. (Si un tel résultat vous est demandé vous ne pouvez vous contenter d'invoquer la règle d'Abel, vous devez tout reprendre à zéro).