Chapitre 8

Fonction d'une variable réelle : dérivation

Dans ce chapitre toutes les fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans tout ce chapitre les intervalles sont supposés d'intérieur non vide. I et J désignent deux tels intervalles, même quand on oublie de le dire.

On remarquera que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, de dimension finie sur $\mathbb{R}$ si E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (et on a $\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$). De même toute application $\mathbb{C}$-linéaire est aussi $\mathbb{R}$-linéaire. On verra que dans ce qui suit seule importe la $\mathbb{R}$-linéarité, qui est impliquée par la $\mathbb{C}$-linéarité.

8.1 Dérivation

8.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 8.1 *Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, vers un e.v.n de dimension fine sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit x un point de A. f est dite dérivable en x si la fonction g définie sur $I - \{x\}$ par $g(y) = \dfrac{1}{y-x}.(f(y) - f(x))$ admet une limite en x. Cette limite se note $f'(x)$.*

Proposition 8.1 *Une fonction f est dérivable en x si et seulement si elle admet en x un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\exists A \in E \quad f(y) = f(x) + (y-x)A + \circ(y-x).$$

A est unique et vaut $f'(x)$.

8.1.2 Dérivée

Définition 8.2 *Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. La fonction dérivée est alors la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Notation : la dérivée d'une fonction f peut être notée f', $\mathrm{D}f$, $\frac{df}{dx}$; pour les dérivées à droite et à gauche.

Remarque 8.1 *On pourra parler de la dérivée de f, même si f est définie sur une réunion d'intervalles vraiments disjoints (c'est-à-dire dont la réunion deux à deux n'est jamais un intervalle). C'est la fonction dont la la restriction à chacun de ces intervalles est la dérivée de la la restriction à cet intervalle. On pourra parler de la dérivée d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par exemple. Mais on fera attention que par exemple si $f(x) = |x|$ alors f est dérivable sur les deux intervalles disjoints $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$ mais pas sur leur réunion.*

8.1.3 Usage de coordonnées

Proposition 8.2 *Soit $\mathcal{B}(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Soit f une fonction de l'intervalle I vers E et $(f_1, \ldots, f_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable si et seulement si chacune des f_i l'est et dans ce cas*

$$f' = f_1' e_1 + \cdots + f_n' e_n.$$

Le cas particulier des fonctions à valeurs complexes mérite d'être retenu :

Proposition 8.3 *Une fonction f à valeurs complexes est dérivable si et seulement si $\overline{f}$ l'est, ou si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}\, f$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$ le sont. Dans ce cas :*

$$D(\overline{f}) = \overline{D(f)} \text{ et } Df = D(\mathcal{R}\mathrm{e}\, f) + iD(\mathcal{I}\mathrm{m}\, f).$$

8.1.4 Dérivée à droite, à gauche

Définition 8.3 *Si $f_{|[x,+\infty[\cap I}$ est dérivable en x, on dit que f admet une dérivée à droite en x. On définit de même la notion de dérivée à gauche en x.*

Notation : on utilise les notations $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$.

8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

8.2.1 Linéarité

Proposition 8.4 *L'ensemble des fonctions dérivables sur A à valeurs dans E est un espace vectoriel et le passage à la dérivée est une application linéaire.*

Proposition 8.5 *Soit f une application dérivable sur l'intervalle I, à valeurs dans E et u une application linéaire de E vers F. Alors $u \circ f$ est dérivable et $D(u \circ f) = u \circ D(f)$.*

8.2.2 Expression de la dérivée d'une fonction de la forme $B(f, g)$, où B est une application bilinéaire

Théorème 8.1 *Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}$ vers un e.v.n de dimension finie E, soit g une application dérivable de A vers un e.v.n de dimension finie F. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G où G est un e.v.n de dimension finie. Alors si f et g sont dérivables sur A, il en est de même de $B(f, g)$, et l'on a : $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.*

Corollaire 8.1 *L'ensemble des applications numériques dérivables sur A est une algèbre et de plus : $(fg)' = f'g + fg'$.*

Exemple 1 : on peut utiliser le théorème pour dériver un produit scalaire de fonctions, le carré de la norme, ou un produit vectoriel.

Application : vecteur vitesse d'un mouvement de norme constante.

Application : la normale en M à une ellipse est la bissectrice des droites joignant M aux deux foyers.

Exemple 2 : un exemple où E est différent de F est : $E = \mathbb{K}$ $F = F$; on peut en déduire que si ϕ est une fonction numérique et f une fonction vectorielle dérivables sur A, ϕf est dérivable sur A avec : $(\phi f)' = \phi' f + \phi f'$.

8.2.3 Composition

Théorème 8.2 *Soit φ une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$, soit g une application dérivable de J vers un e.v.n E. On suppose $\varphi(I) \subset J$, alors $g \circ \varphi$ est dérivable sur A. On a : $(g \circ \varphi)' = f' \, (g' \circ \varphi)$. C'est à dire :*

$$\forall x \in I \ (g \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x).g'(\varphi(x)).$$

8.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

8.3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 8.4 *Une fonction est dite de classe C^0 si elle est continue, et de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si elle est dérivable et si sa dérivée est de classe C^{k-1}.*

Notation : Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on appelle dérivée k-ième de f la dérivée de sa dérivée $(k-1)$-ième si $k \geq 1$, et la fonction elle-même si $k = 0$. On la note $f^{(k)}$, ou $D^k f$ ou $\frac{d^k f}{dx^k}$. On remarquera que cette définition reste valable, même si on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^k$, elle permet de définir les fonctions k fois dérivables et la dérivée k-ième d'une fonction k fois dérivable.

Définition 8.5 *Une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k est dite de classe C^∞.*

Proposition 8.6 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur l'intervalle I, à valeurs dans le même espace E, est un espace vectoriel noté $\mathcal{C}^k(I,E)$.*

Remarque : si E est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, on écrira plus simplement : $\mathcal{C}^k(I)$.

8.3.2 La formule de Leibniz

Théorème 8.3 *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, à valeurs dans des espaces F et G et B une application bilinéaire de $F \times G$ vers E. Alors $B(F,G)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$B(f,g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i\, B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Par application de ce théorème au produit de deux fonctions, on prouve immédiatement :

Proposition 8.7 *$\mathcal{C}^k(I)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions numériques.*

8.3.3 Composition

Théorème 8.4 *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de l'intervalle I vers l'intervalle $\mathbb{R}$, soit g une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ vers E. On suppose $\varphi(I) \subset J$, alors $g \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.*

8.4 Intégration sur un segment

8.4.1 Définition de l'intégrale

8.4.2 Linéarité, relation de Chasles

8.4.3 Inégalité triangulaire

8.4.4 Sommes de Riemann

8.5 Intégrale fonction de la borne supérieure

8.5.1 Dérivation

8.5.2 Inégalité des accroissements finis

8.6 Formules de Taylor

8.6.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

8.6.2 Inégalité de taylor-Lagrange

8.6.3 Formule de Taylor-Young

8.7 Arcs paramétrés

8.7.1 Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$

8.7.2 Exemples simples d'arcs paramétrées