Chapitre 9

Fonction d'une variable réelle : intégration

9.1 L'intégrale de Riemann

On désigne par E un espace vectoriel normé complet, par exemple un espace vectoriel normé de dimension finie, sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.

9.1.1 Définition de l'intégrale

On se donne un intervalle compact $I = [a, b]$, non réduit à un point. Par conséquent $a < b$.

Définition 9.1 *Soit f une fonction en escalier de I vers E. Il existe une suite strictement croissante $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit une constante c_i. On appelle intégrale de f le nombre*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

On ne vérifiera pas que cette définition est indépendante de la subdivision.
Soit f une fonction en escalier de I vers E. Si u est une application linéaire de E vers l'espace vectoriel normé F, il est clair que $u \circ f$ est une fonction en escalier sur I. De plus

$$\int_a^b u(f(x))dx = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Proposition 9.1 *L'intégrale des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une forme linéaire continue pour la norme de la convergence uniforme. Plus précisément*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \le \int_a^b \|f(t)\|dt \le (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|.$$

Proposition 9.2 *L'intégrale des fonctions en escalier sur $[a, b]$, à valeur réelles, est une forme linéaire croissante.*

On pourrait montrer qu'une forme linéaire croissante sur $\mathcal{E}([a, b, \mathbb{R})$ est nécessairement continue.

Définition 9.2 *Une application $f : [a, b] \to E$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si : Pour tout ϵ strictement positif il existe deux fonctions en escalier g_ϵ et θ_ϵ telles que :*

$$\forall x \in [a, b] \quad \|f(x) - g_\epsilon(x)\| \le \theta_\epsilon(x) \text{ et } \int_a^b \theta_\epsilon(x)dx \le \epsilon.$$

Soit f une fonction intégrable, soit $E(f, \epsilon)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre $\int_a^b g_\epsilon(t)dt$ si g_ϵ et θ_ϵ vérifient les conditions précédentes, alors

$$\bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}^{*+}} \overline{E(f, \epsilon)}$$

est un ensemble réduit à un élément. On appelle cet élément l'intégrale de f et on le note

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Il existe d'autres notations pour l'intégrale de f. Par exemple

$$\int_I f \text{ et } \int_{[a,b]} f$$

Cette définition étend la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 9.3 *Une fonction f définie sur $[a,b]$ est intégrable si et seulement si il existe une suite $(g_n, \theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de couples de fonctions en escalier telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(t)dt = 0 \text{ et } (\int_a^b \theta_n(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge.Si tel est le cas, pour toute suite $(g_n, \theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de couples de fonctions en escalier telle que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(t)dt = 0$ la suite $(\int_a^b \theta_n(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

Proposition 9.4 *Toute fonction intégrable est bornée.*

Mais il existe des fonctions bornées qui ne sont pas intégrables, par exemple la fonction définie sur $[0,1]$, valant 1 pour un rationnel, 0 sinon.

Théorème 9.1 *Toute fonction continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann.*

En effet toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, dont les intégrales, d'après l'inégalité triangulaire, formeront une suite de Cauchy. Cette suite sera convergente.

Plus généralement toute fonction limite uniforme de fonctions en escalier est intégrable. Une telle fonction est dite réglée. On peut prouver que les fonctions réglées sont les fonctions qui admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point.

Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas réglées. Par exemple la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

Proposition 9.5 *Deux fonctions continues par morceaux qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont même intégrale.*

Cette propriété permet de définir l'intégrale de fonctions définies sur I , privé d'un nombre fini de points et pouvant être prolongées en une fonction continue par morceaux, comme l'intégrale d'un prolongement. On verra que cette extension de la définition est très utile pour pouvoir parler de l'intégrale de la dérivée d'une fonction de classe C^1 par morceaux, bien que cette dérivée ne soit pas partout définie. On obtiendra, par exemple, un lien entre les coefficients de Fourie d'une fonction de classe C^1 par morceaux et ceux de sa dérivée.

9.1.2 Propriétés de l'intégrale et des fonctions intégrables

Théorème 9.2 *L'ensemble des fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([a,b],E)$ et l'application qui à f associe $\int_a^b f(t)dt$ est linéaire.*

On peut étendre à ce sous-espace vectoriel les résultats obtenus pour les fonctions en escalier

Soit f une fonction intégrable de I vers E. Si u est une application linéaire continue de E vers l'espace vectoriel normé F, alors $u \circ f$ est une fonction intégrable sur I. De plus

$$\int_a^b u(f(x))dx = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Proposition 9.6 *L'intégrale des fonctions continues par morceaux (ou plus généralement intégrables) sur $[a,b]$ est une forme linéaire continue pour la norme de la convergence uniforme. Plus précisément*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|.$$

Proposition 9.7 *L'intégrale des fonctions continues par morceaux (ou plus généralement intégrables) sur $[a, b]$, à valeur réelles, est une forme linéaire croissante.*

On pourrait montrer qu'une forme linéaire croissante sur $\mathcal{B}([a, b, \mathbb{R})$ est nécessairement continue pour la norme de la convergence uniforme.
Voici maintenant un théorème qui nous servira souvent.

Théorème 9.3 *L'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle.*

Proposition 9.8 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit f une application de $[a, b]$ vers E, telle que $f = f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$. $(f_i : [a, b] \to \mathbb{K})$.Alors f est intégrable si et seulement si chaque f_i est intégrable au sens de Riemann sur [a,b], et si tel est le cas*

$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b f_1(t)dt)e_1 + \cdots + (\int_a^b f_n(t)dt)e_n.$$

Ce résultat s'applique en particulier au fonctions à valeurs complexes qui sont intégrables si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire le sont.

Théorème 9.4 *Soient f et g deux fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors leur produit est intégrable et l'on a l'inégalité suivante :*

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskiĭ. Ele peut s'écrire dans le cas réel :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\, dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt,$$

et dans le cas complexe :

$$\left| \int_a^b \overline{f(t)}g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

Théorème 9.5 *Une application f de $[a, b]$ vers E est intégrable si et seulement si pour tout c de $]a, b[$ les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont intégrables. Si l'on note toujours f ces restrictions :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

C'est la relation de Chasles. On parle aussi d'additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Il résulte de ce théorème que si f est intégrable sur I la restriction de f à tout segment J de f est intégrable. De plus

$$\int_J f = \int_I \chi_J f$$

où χ_J est la fonction caractéristique de l'intervalle J.
Extension : On pose pour toute fonction intégrable sur un intervalle contenant a et b :

$$\int_a^a f(t)dt = 0,$$

et si $b < a$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Avec ces notations la relation de Chasles reste valable.

9.2 Sommes de Riemann d'une fonction continue

9.2.1 Définition

Définition 9.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann une somme du type*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i), \text{ où } \forall i \ \xi_i \in [a_i, a_{i+1}].$$

Exemple : Les deux sommes de Riemann le plus usuellement associées à f sont les sommes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) \text{ et } \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}).$$

9.2.2 Convergence de ces sommes

Théorème 9.6 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Lorsque le pas des éléments d'une suite de subdivisons tend vers zéro les sommes de Riemann associées à ces subdivisions tendent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$.*

Corollaire 9.1 *Si f est continue sur $[a, b]$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

9.2.3 Calcul numérique des intégrales

Proposition 9.9 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ on a :* (méthode des trapèzes)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Proposition 9.10 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ on a :* (méthode de Simpson)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (2i+1)\frac{b-a}{2n})\right)$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt \quad .$$

9.3 Primitives

9.3.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 9.4 *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un e.v.n complet. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur A, telle que $F' = f$.*

Théorème 9.7 *Si f est une fonction définie sur un intervalle de R, et si F est une primitive de f , les autres primitives sont de la forme $F + k$, où k est une constante quelconque.*

La démonstration utilise la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle. Si une fonction est constante sur un intervalle sa dérivée est nulle. Réciproquement si la dérivée d'une fonc tion f, définie sur un intervalle I est nulle alors la fonction est constante. En effet, si x_0 est un point de l'intervalle, pour tout $\epsilon > 0$, le plus grand intervalle J contenant x_0 et tel que pour tout x de J $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon|x - x_0|$ est à la fois ouvert et fermé. Comme il est non vide, il est égal à I, puisque I est connexe.

Théorème 9.8 *Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'entre elles est la fonction :*

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

où x_0 est un point de l'intervalle.

9.3.2 Intégration par parties

Théorème 9.9 *Soient f et g deux applications de classe C^1, définies sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Que l'on écrit souvent :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

9.3.3 Changement de variables

Théorème 9.10 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, ϕ une application de classe C^1 de l'intervalle $[c,d]$ vers $[a,b]$. On a :*

$$\int_c^d f(\phi(u))\phi'(u)\,du = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(t)\,dt.$$

Si ϕ est un difféomorphisme, on pourra écrire :

$$\int_c^d f(\phi(u))|\phi'(u)|\,du = \int_a^b f(t)\,dt.$$

9.3.3.1 Application du changement de variable

. Sif est continue par morceaux sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\int_0^1 f(a+u(b-a))\,du.$$

En particulier, si f est une fonction continues sur $\mathbb{R}^2$, et si α et β sont deux fonctions à valeurs réelles :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt = (\beta(x)-\alpha(x))\int_0^1 f(x,\alpha(x)+u(\beta(x)-\alpha(x)))\,du,$$

par exemple :

$$\int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt = x^{n+1}\int_0^1 (1-u)^n f(xu)\,du.$$

9.3.4 Extension au cas des fonctions de classe C^0 ou C^1 par morceaux

Toutes les résultats précédemment obtenus s'étendent aux fonctions de classe C^0 ou C^1 par morceaux, moyennant quelques précautions.

Définition 9.5 *On appelle primitive d'une fonction continue par morceaux f, une fonction g continue et de classe C^1 par morceaux, dérivable en tout point x où f est continue et telle qu'en ce point $g'(x) = f(x)$.*

Théorème 9.11 *Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs dans E, admet des primitives, ce sont les fonctions de la forme :*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt + k,$$

où a est un point fixé de I, et k décrit E.

Théorème 9.12 *Si f est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur I, on aura :*

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Ici, $\int_a^x f'(t)\,dt$ doit être interprétée comme l'intégrale d'une fonction pouvant être prolongée en une fonction continue par morceaux.

Théorème 9.13 *Si f et g sont deux fonctions continues et de classe C^1 par morceaux sur un intervalle I contenant $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Pour comprendre la nécessité de la continuité de f et g dans cette formule, regadons ce qu'elle devient dans le cas de fonctions qui restent de classe C^1 par morceaux mais qui ne sont plus supposées continues.
On aura, si $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision associée à f et g :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = (fg)(b-0) - (fg)(a+0) + \left(\sum_{i=0}^{n-1}(fg)(x_i+0) - (fg)(x_i-0)\right) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Le terme $(fg)(x_i + 0) - (fg)(x_i - 0)$ s'appelle le saut de fg en x_i.
La formule du changement de variable reste valable si on suppose seulement f continue parmorceaux, ϕ restant de classe C^1.

9.4 Les accroissements finis

9.4.1 Inégalité des accroissements finis

Inégalité des accroissements finis
Théorème 9.14 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe un réel M tel que :*

$$\forall x \in]a, b[\ \|f'(x)\| \leq M.$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Plus précisément, s'il existe une fonction g continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b[$, telle que

$$\forall x \in]a, b[\ \|f'(x)\| \leq g'(x).$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(g(b) - g(a)).$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la restriction de f à un intervalle contenu dans $[a, b]$, on prouve, sous les mêmes hypothèses :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2\ \|f(x) - f(y)\| \leq M|x - y|.$$

Cette inégalité s'étend sans difficulté aux fonctions continues et de classe C^1 par morceaux.

9.4.2 Caractérisations des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes

Théorème 9.15 *Soit f une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, f est constante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est nulle sur cet intervalle.*

On a déjà démontré ce théorème pour une fonction dérivable, il découle diréctement de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1. On pourrait facilement adapter la démonstration de la caractérisation des fonctions constantes pour prouver que l'inégalité des accroissements finis reste vraie, en supposant seulement f dérivable.

Théorème 9.16 *Soit f une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, f est lipschitzienne sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est bornée sur cet intervalle. Plus précisément :*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2\ \|f(x) - f(y)\| \leq M|x - y|$$

équivaut à :

$$\forall x \in [a, b]\ \|f'(x)\| \leq M.$$

9.4.3 Prolongement d'une application de classe C^1

Théorème 9.17 *Soit f une application à valeurs dans un espace de Banach, de classe C^1 sur $]a,b]$, continue sur $[a,b]$, et dont la dérivée sur $]a,b]$ admet une limite L en a. Alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f'(a)=L$.*

Ce résultat s'étend aux fonctions de classe C^k.

Théorème 9.18 *Soit f une application à valeurs dans un espace de Banach, de classe C^k sur $]a,b]$, continue sur $[a,b]$, et dont toutes les dérivées admettent une en a. Alors f est de classe C^k sur $[a,b]$.*

Un exemple : La fonction définie par $f(0)=0$ et $f(x=\exp(-\frac{1}{x^2})$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

9.5 Formules de Taylor

9.5.1 Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1}

Théorème 9.19 *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. On peut écrire :*

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt.$$

Remarque : Cette formule s'étend au cas où $b\le a$.

9.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 9.20 *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur I, à valeurs dans un espace de Banach, soient a et b deux points de I. On a la majoration :*

$$\left\|f(b)-\left\{f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)\right\}\right\| \le \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}\sup_{t\in[\min(a,b),\max[a,b]]}\|f^{(p+1)}(t)\| \quad .$$

Remarque : Cette formule s'étend au cas où $b\le a$, en remplaçant $(b-a)$ par $|b-a|$. Remarque : Lorsque l'on prend la borne supérieure, ce n'est que sur l'intervalle privé de l'ensemble fini des points où la dérivée d'ordre $(p+1)$ n'existe pas.

9.5.3 Intégration des développements limités

Théorème 9.21 *Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de a et dont la dérivée, continue sur ce voisinage, possède en a un développement limité à l'ordre p. Alors f possède en a un développement limité à l'ordre $p+1$, obtenu en intégrant terme à terme le développement de la fonction dérivée.*

9.5.4 Théorème de Taylor-Young

Théorème 9.22 *Soit f une fonction p fois dérivable en un point a d'un intervalle I. On peut écrire, au voisinage de ce point :*

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\circ((x-a)^p).$$

9.6 Intégration des suites et des séries d'applications

9.6.1 Suites et séries d'applications continues

Définition 9.6 *L'application $N_1 : f\mapsto\int_{[a,b]}\|f\|=\int_a^b\|f(t)\|\,dt$ est une norme sur $C([a,b],E)$, dite norme de la convergence en moyenne.*

Pour toute application f continue sur $[a,b]$ on a :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq N_1(f) \leq (b-a)N_\infty(f).$$

On emploie aussi les notations $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$.

Proposition 9.11 *La convergence uniforme implique la convergence en moyenne. Plus précisément si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f (qui est donc continue), alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Retenir de cette proposition que toute permutation de limite et d'intégration doit être justifiée.
Le passage à la limite peut ne pas avoir lieu si la convergence n'est pas uniforme, par exemple la suite de fonctions $(n^2x^n(1-x))$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2x^n(1-x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n^2x^n(1-x)\,dx.$$

Mais la convergence uniforme n'est pas nécessaire pour permettre la permutation du passage à la limite et de l'intégration. La suite $(nx^n(1-x))$, ne converge pas uniformément vers la fonction nulle mais

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n2x^n(1-x)\,dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^n(1-x)\,dx.$$

Ici on est dans le cadre d'application d'un théorème plus puissant, le théorème de convergence dominée que l'on verra ultérieurement.

Proposition 9.12 *Si une série de fonctions continues $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors :*

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Ce résultat découle directement de celui sur les suites. Plus précisément, dans le cas de la convergence normale :

Proposition 9.13 *Si une série de fonctions continues $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$, elle converge en moyenne et*

$$N_1(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

9.6.2 Suites et séries de fonctions de classe C^k

Théorème 9.23 *Soit (f_n) une suite d'applications continues sur un intervalle I, a un point de I. Soit h_n la primitive de f_n qui s'annule en a. Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment vers f, la suite h_n converge uniformément sur tout segment vers la primitive de f qui s'annule en a.*

On en déduit comme corollaire un théorème sur la dérivation d'une limite de suites de fonctions.

Théorème 9.24 *Soit (f_n) une suite d'applications de classe C^1 sur un intervalle I. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f, et que la suite (f_n') des dérivées converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g, alors f est de classe C^1 sur I de dérivée $f' = g$.*

Théorème 9.25 *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série d'applications de classe C^1 sur un intervalle I. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement, et que la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ des dérivées converge uniformément sur tout segment de I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I de dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.*

Application à la dérivation de l'exponentielle.

Théorème 9.26 *Soit a un élément d'une algèbre de Banach, l'application*

$$g_a : t \mapsto \exp(ta)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$g'_a = a g_a = g_a a.$$

On en déduit, si a et b commutent $g_{a+b} = g_a g_b$, en appliquant le théorème de Cauchy, puisque ces deux fonctions sont solutions de $h' = (a+b)h, h(0) = 1$. En particulier, pour $t = 1$ $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ si a et b commutent.

9.7 Intégrales dépendant d'un paramètre

9.7.1 Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 9.27 *Soit $f : A \times [a,b] \mapsto E$ une fonction continue, (où A est une partie de $\mathbb{R}^p$). La fonction F définie sur A par $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur A.*

9.7.2 Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 9.28 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $I \times [a,b]$, à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie. On suppose que f admet en tout point une dérivée partielle par rapport à x et que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$. Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur I. Plus précisément, on a :*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

9.7.3 Intégration sur un segment

Théorème 9.29 *Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, on a :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\, dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\, dx \right) dt \ .$$

Remarque : Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Fubini .

9.8 Fonctions intégrables à valeurs positives

Définition 9.7 *Une fonction f à valeurs réelles positives, continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable (ou sommable) si et seulement si il existe un réel M tel que, pour tout segment J contenu dans I,*

$$\int_J f \leq M.$$

Définition 9.8 *Si f,à valeurs réelles positives et continue par morceaux sur un intervalle I, est intégrable sur I le nombre*

$$\int_I f = \sup_{J \subset I} \int_J f$$

s'appelle l'intégrale de f.

On vérifie facilement que dans le cas où I est un segment on retrouve l'ancienne définition de l'intégrale. Notre nouvelle définition est une généralisation de l'intégrale.

Plus précisément supposons que f soit continue par morceaux sur $[a,b]$, alors elle est intégrable sur chacun des intervalles $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$ et toutes les intégrales associées sont égales.

Noter aussi la similitude avec la définition d'une famille sommable de réels positifs. On va pouvoir transposer les résultats obtenus pour les familles sommables.

On se donne une fonction f,à valeurs réelles positives et continue par morceaux sur un intervalle I.

Proposition 9.14 *S'il existe une suite croissante de segments (J_n) dont la réunion est I, et un réel M tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{J_n} f \leq M,$$

alors f est intégrable et

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f.$$

Réciproquement

Proposition 9.15 *Si f est intégrable, pour toute suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est I*

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f.$$

Proposition 9.16 *La somme de deux fonctions f et g, continues par morceaux positives et intégrables sur J est intégrable sur J. Il en est de même de λf si λ est un réel positif. De plus*

$$\int_J (f+g) = \int_J f + \int_j g \text{ et } \int_J \lambda f = \lambda \int_J f.$$

L'intégrale possède toujours une propriété de croissance.

Proposition 9.17 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, positives définies sur un intervalle J. si g est intégrable sur J et si $f \leq g$, alors f est intégrable sur J et $\int_J f \leq \int_J g$.*

Théorème 9.30 *Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur J, telle que*

$$\int_J f = 0.$$

Alors f est nulle.

Obtenons maintenant une sorte de relation de Chasles pour l'intégrale sur un intervalle quelconque.

Proposition 9.18 *Si f est une fonction définie sur un intervalle I, si a est un point de i, alors f estintégrable sur I si et seulement si les restrictions de f aux intervalles $]-\infty, a] \cap I$ et $[a, +\infty[\cap I$ sont intégrables, de plus, dans ce cas :*

$$\int_I f = \int_{]-\infty,a]\cap I} f + \int_{[a,+\infty[\cap I} f.$$

Nous allons maintenant faire la jonction entre cette extension de la notion d'intégrale avec ce qu'on appelle les intégrale impropres.

Soit f une fonction continue par morceaux, positive sur l'intervalle $I = [a, b[$. On appelle intégrale indéfinie de f la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Contrairement à ce que pourrait laisser penser son nom cette fonction est bien définie, puisque f est continue par morceaux.

On peut se poser la question de savoir si cette fonction admet une limite en b. Si cette limite existe, on l'appelle l'intégrale (impropre) de f sur $[a, b[$ et on la note $\int_a^b f(t)\,dt$.

Théorème 9.31 *La fonction f, continue par morceaux et positive sur $[a, b[$ est intégrable si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ existe. De plus, dans ce cas :*

$$\int_{[a,b[} f = \int_a^b f(t)\,dt.$$

En combinant ce théorème avec celui sur la croissance nous allons obtenir deux critères nous permettant d'affirmer l'intégrabilité d'un fonction. Il sont connus sous le nom de critères de Riemann.

Proposition 9.19 *Soit a un réel strictement positif, α un réel quelconque. La fonction t^α est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$, et sur $]0, a]$ si et seulement si $\alpha > -1$.*

Application à la fonction Γ. La fonction Γ, généralisation de fonction $n \mapsto n!$ est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En particulier $\Gamma(n+1) = n!$.

9.9 Fonctions intégrables à valeurs complexes

Définition 9.9 *Une fonction f à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable (ou sommable) si et seulement si $|f|$ est intégrable.*

Définition 9.10 *Si f est intégrable, pour toute suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est I la suite*

$$\left(\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers une limite indépendante de la suite (J_n). Cette limite s'appelle l'intégrale de f et se note :

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f.$$

Cette notion de l'intégrale étend la définition de l'intégrale, si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ elle est intégrable sur $[a, b]$, et son intégrale est égale à son intégrale de Riemann. plus généralement f est intégrable sur $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et toutes les intégrales associées sont égales.

Théorème 9.32 *Si f et g sont continues par morceaux sur I, si $|f| \leq g$ et si g est intégrable alors f est intégrable sur I.*

Corollaire 9.2 *Si f est bornée sur l'intervalle I alors elle est intégrable.*

9.9.1 Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes

On peut étendre par passage à la limite toutes les propriétés de l'intégrale de Riemann.

Proposition 9.20 *L'ensemble des fonction intégrables sur I est un sous-espace vectoriel (de l'ensemble des fonctions à valeurs complexes), et le passage à l'intégrale est linéaire.*

Proposition 9.21 *Si f est intégrable sur I, $|f|$ est intégrable sur I et*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Soit f une fonction à valeurs réelles, définissons $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Proposition 9.22 *f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont. Dans ce cas*

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \quad , \quad \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

Proposition 9.23 *Une fonction f à valeur complexe est intégrable si et seulement si $\overline{f}$ l'est et dans ce cas :*

$$\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}.$$

Proposition 9.24 *Une fonction f à valeur complexe est intégrable si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}\, f$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$ le sont et dans ce cas :*

$$\int_I f = \int_I \mathcal{R}\mathrm{e}\, f + i \int_I \mathcal{I}\mathrm{m}\, f.$$

Proposition 9.25 *Si f est intégrable sur I et si J est un intervalle contenu dans I, alors f est intégrable sur J et*

$$\int_J f = \int_I \chi_J f,$$

où χ_J est la fonction caractéristique de l'intervalle J.

Proposition 9.26 *Si f est une fonction définie sur un intervalle I, si a est un point de i, alors f est intégrable sur I si et seulement si les restrictions de f aux intervalles $]-\infty, a] \cap I$ et $[a, +\infty[\cap I$ sont intégrables, de plus, dans ce cas :*

$$\int_I f = \int_{]-\infty,a]\cap I} f + \int_{[a,+\infty[\cap I} f.$$

Introduisons la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ pour désigner l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $]a, b[$, ou $[a, b[$, ou $[a, b]$ ou $]a, b]$. On s'autorise des valeurs infinies pour a et b. Cette notation est cohérente, car si plusieurs de ces intégrales sont définies, elles sont égales. Et étendons cette notation au cas $a = b$ par $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, et au cas $b < a$ par $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$. Avec ces conventions, on a :

Proposition 9.27 Relation de Chasles. Si a, b et c sont trois points de l'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'un intervalle I sur lequel la fonction f est intégrable, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

9.9.2 Intégrales impropres

Définition 9.11 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur $[a, b[$, si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ possède une limte lorsque x tend vers b, on note cette limite*

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Une telle limite s'appelle une intégrale impropre. Si f est un intégrable sur $[a, b[$, on retrouve l'intégrale de f. Mais il peut se faire que l'intégrale impropre existe sans que f ne soit intégrable sur $[a, b[$. On parle alors d'intégrale semi-convergente. On peut aussi d'intégrale semi-convergente d'une fonction définie sur $]a, b]$, et même sur $]a, b[$, en décomposant l'intervalle $]a, b[$ en $]a, c]$ et $[c, b[$ et en étudiant séparément chacune des deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$.
Un exemple classique d'intégrale semi-convergente, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

9.9.3 Utilisation des relations de comparaison

Proposition 9.28 *Soient f et ϕ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives, supposons que ϕ soit intégrable sur $[a, b[$.*

— *Si $f(x) =_b \mathcal{O}(\phi(x))$, alors f est intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \mathcal{O}(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$

— *Si $f(x) =_b \circ(\phi(x))$, alors f est intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \circ(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$

— *Si $f(x) \sim_b \phi(x)$, alors f est intégrable et*

$$\int_x^b f(t)\,dt \sim_b \int_x^b \phi(t)\,dt.$$

Proposition 9.29 *Soient f et ϕ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives, supposons que f ne soit pas intégrable sur $[a, b[$.*

— *Si* $f(x) =_b \mathcal{O}(\phi(x))$*, alors* ϕ *n'est pas intégrable et*
$$\int_a^x f(t)\,dt =_b \mathcal{O}(\int_a^x \phi(t)\,dt).$$
— *Si* $f(x) =_b \circ(\phi(x))$*, alors* ϕ *n'est pas intégrable et*
$$\int_a^x f(t)\,dt =_b \circ(\int_a^x \phi(t)\,dt).$$
— *Si* $f(x) \sim_b \phi(x)$*, alors* ϕ *n'est pas intégrable et*
$$\int_a^x f(t)\,dt \sim_b \int_a^x \phi(t)\,dt.$$

La première proposition s'étend dans une certaine mesure aux fonction à valeurs complexes.

Proposition 9.30 *Soient* f *et* ϕ *deux fonctions continues par morceaux sur* $[a,b[, f$ *à valeurs réelles ou complexe et* ϕ *à valeurs réelles positives, supposons que* ϕ *soit intégrable sur* $[a,b[$*.*

— *Si* $f(x) =_b \mathcal{O}(\phi(x))$*, alors* f *est intégrable et*
$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \mathcal{O}(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$
— *Si* $f(x) =_b \circ(\phi(x))$*, alors* f *est intégrable et*
$$\int_x^b f(t)\,dt =_b \circ(\int_x^b \phi(t)\,dt).$$

Le théorème sur les équivalents reste vrai, mais il ne fait pas partie du programme. Le théorème sur les intégrales divergentes ne peut se généraliser aux fonctions à valeurs complexes, même en partie.

9.10 Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Proposition 9.31 *Les fonctions continues et intégrables sur* I*, à, valeurs complexes, constituent un sous-espace vectoriel de* $C(I)$*.*

On peut munir cette espace vectoriel d'une norme en posant
$$N_1(f) = \int_I |f|.$$

Proposition 9.32 *Si* I *est intervalle borné, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne.*

Ce résultat n'est plus vrai si l'intervalle n'est pas borné.

Corollaire 9.3 *Si* (f_n) *est une suite de fonction continues par morceaux définies sur un intervalle borné* I *qui converge uniformément vers une fonction continue par morceaux* f *alors :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux.

Proposition 9.33 *Les fonctions continues* f *sur* I*, à, valeurs complexes, telles que* $|f|^2$ *soit intégrable, constituent un sous-espace vectoriel de* $C(I)$*.*

Une telle fonction est dite de carré intégrable ;
Plus précisément :

Proposition 9.34 *L'espace des fonctions continues par morceaux sur* I*, de carré intégrable, est un espace préhibertien pour la forme sesquilinéaire :*
$$(f,g) = \int_I \overline{f} g.$$

On peut donc munir cette espace vectoriel d'une norme en posant
$$N_2(f) = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

9.11 Convergence monotone, de convergence dominée

Théorème 9.33 *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux et intégrables sur I, convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite $(\int_I f_n)$ est majorée et dans ce cas*

$$\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

Démontrons ce résultat dans le cas où la suite des f_n converge uniformément sur tout segment. Le programme stipulant que cette démonstration est exigible des étudiants.

Commençons par remarquer qu'en remplaçant la suite par $(f_n - f_0)$ on se ramène au cas où toutes les fonctions f_n sont positives (et f aussi par passage à la limite), ce que nous supposerons par la suite.

Supposons d'abord f intégrable, on a pour tout n $\int_I f_n \leq \int_I f$, de plus la suite $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \leq \int_I f$.

Réciproquement, supposons que $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Elle est croissante et majorée par sa limite M. De plus si J est un segment contenu dans I la suite (f_n) converge uniformément vers f sur J, on aura $\lim \int_J f_n = \int_J f$. Or les f_n sont toutes positives, donc pour tout n $\int_J f_n \leq \int_I f_n \leq M$ et par passage à la limite $\int_J f \leq M$. Il en résulte que f est intégrable et que $\int_I f \leq \lim \int_J f_n$.

Corollaire 9.4 *Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions positives continues par morceaux sur un intervalle I, convergeant vers une fonction continue par morceaux. La série des intégrales $\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ est convergente si et seulemnt si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et dans ce cas*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(\sum_{k=0}^{n} f_k)$.

Théorème 9.34 *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une séries de fonctions définies sur l'intervalle I, à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux. On suppose que cette série converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

converge. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

De plus

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Démontrons ce résultat dans le cas où la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment. Le programme stipulant que cette démonstration est exigible des étudiants.

Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Soit (J_p) une suite croissante de segments dont la réunion est I. On a pour tout n $|f| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k|$, donc par intégration, pour tout p

$$\int_{J_p} |f| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{J_p} |f_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

Il en résulte que f est intégrable sur I, et $\int_I |f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.

L'intégrale de f sur I sera donnée par

$$\int_I f = \lim_{p\to\infty} \int_{J_p} f = \lim_{p\to\infty} \int_{J_p} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{p\to\infty} Sa \int_{J_p} f_n,$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que la série converge uniformément sur J_p.

Il reste à permuter le passage à la limite et la sommation, pour cela on va prouver que la suite de fonctions (u_n) avec $u_n : p \mapsto \int_{J_p} f_n$ converge uniformément (sur $\mathbb{N}$). Elle converge en fait normalement car pour tout p

$$|u_n(p)| \leq \int_{J_p} |f_n| \leq \int_I |f_n|$$

et la série de terme général $\int_I |f_n|$ est convergente. Or, pour tout n $\lim_{p\to\infty} = \int_I f_n$ existe. Et la série $\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge absolument car $|\int_I f_n| \leq \int_I |f_n|$ et $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge.

Les trois hypothèses du théorème de permutation des limites sont vérifiées. On peut donc permuter passage à la limite et sommation et le théorème est démontré.

Théorème 9.35 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur I. On suppose qu'il existe une fonction ϕ, continue par morceaux, à valeurs réelles positives, intégrable sur I, telle que pour tout n on ait $|f_n| \leq \phi$. Si la suite f_n converge simplement vers une fonction f, continue par morceaux sur I, alors f est intégrable et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Démontrons ce résultat dans le cas où la suite des f_n converge uniformément sur tout segment. Le programme stipulant que cette démonstration est exigible des étudiants.

La technique est similaire à celle des démonstrations précédentes.

Par passage à la limite on obtient $|f| \leq \phi$, donc f est intégrable. Soit (J_p) une suite croissante d'intervalles dont la réunion est I. De la majoration des $|f_n|$ par une intégrale il résulte déjà que chaque f_n est intégrable, ainsi que f. De plus, puisque (f_n) converge uniformément vers f sur J_p, on aura

$$\int_{J_p} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_p} f_n \text{ et } \int_I f = \lim_{p\to+\infty} \int_{J_p} f.$$

Sachant que

$$\int_I f_n = \lim_{p\to+\infty} \int_{J_p} f_n$$

il s'agit à nouveau de permuter deux passages à la limite.

Posons $u_p : n \mapsto \int_{J_p} f_n$.

- Chaque u_p possède une limite en $+\infty$, c'est $\int_{J_p} f$.
- La suite de ces limites existe car f est intégrable.
- La suite (u_p) converge uniformément vers $u : n \mapsto \int_I f_n$ car pour tout n

$$|u(p) - u_p(n)| = |\int_{I-J_p} f_n| \leq \int_{I-J_p} |f_n| \leq \int_{I-J_p} |\phi| = \int_I \phi - \int_{J_p} \phi.$$

Le dernier membre de cette suite d'inégalité tend vers 0 car ϕ est intégrable.

.

On peut permuter les passages à la limite et ceci démontrer le théorème.

9.12 Intégrales dépendant d'un paramètre

9.12.1 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 9.36 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times I$, où A est une partie de $\mathbb{R}^p$, telle que pour tout x de A la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, et ϕ une fonction positive continue par morceaux et intégrable sur I. Alors, si pour tout élément (x,t) de $A \times I$ $|f(x,t)| \leq \phi(t)$, la fonction g définie sur A par*

$$g(x) = \int_I (f(x,t)\, dt$$

est continue sur A.

Pour justifier ce résultat écrivons I comme la réunion d'une suite croissant (J_p) de segments. Les hypothèses permettent d'affirmer que $u_p : x \mapsto \int_{J_p} f(x,t)\,dt$ est continue sur A. Comme dans la démonstration du théorème de convergence dominée la majoration uniforme en x permet de prouver la convergence uniforme de (u_p) vers g (qui est bien définie grace aux l'hypothèses). g est donc continue sur A.

Ce théorème s'étend sans difficulté au cas où la condition de majoration est vérifiée sur $K \times I$ ou K est compact, puisque pour qu'une fonction soit continue il suffit que sa restriction à tout compact soit continue.

9.12.2 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 9.37 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times I$, où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses du théorème sur la continuité et admettant sur ce domaine une dérivée partielle par rapport à x, vérifiant elle aussi les hypothèses du théorème sur la continuité, alors g est de classe C^1 sur A et*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Cette formule de dérivation est parfois connue sous le nom de formule de Leibniz, c'est du moins l'appellation préconisée par le programme.

La démonstration est une extension de celle de la continuité. On a déjà la continuité, de plus le thèorème sur les intégrales sur un segment dépendant d'un paramètre affirme que u_p est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u_p'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. La condition de majoration de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ permet de prouver que $(u'p)$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. Puisque $(u_p(x_0))$ converge pour un point quelconque de A, le théorème sur la dérivation de la limite s'applique.

On peut étendre le résultat aux fonctions de classe C^k, l'hypothèse sera que f admet sur $A \times I$ des dérivées partielles par rapport x, jusqu'à l'ordre k, vérifiant les conditions du théorème.

9.13 Exercices

Exercice 9.1 (Les théorèmes de la moyenne)
1) (Le premier théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose f intégrable, par exemple continue par morceaux, et de signe constant. On suppose g continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe un c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt \quad .$$

2) (Le deuxième théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions definies sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose f continue sur $[a,b]$. On suppose g de classe C^1 sur $[a,b]$ et monotone. Montrer qu'il existe un c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\int_c^b f(t)\,dt \quad .$$

Indication : On pourra introduire une primitive de f.

Exercice 9.2 *Soit $A : I \to M_p(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que* $\exp A : t \mapsto \exp A(t)$ *est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*