# Chapitre 12

# Réduction des endomorphismes

## 12.1 Généralités

### 12.1.1 Matrices semblables

**Définition 12.1** *Deux matrices $M$ et $N$ de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice $P$ de $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$.*

**Proposition 12.1** *La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.*

**Remarque 12.1** *On fera attention de ne pas confondre la similitude avec l'équivalence. On rappelle que deux matrices $M$ et $N$ de $M_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P$ et $G$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PNQ^{-1}$. Deux matrices semblables sont donc équivalentes, et elles ont en particulier même rang, mais la réciproque est fausse. Par exemple toute matrice inversible est de rang $n$, mais n'est semblable à $I_n$, de rang $n$, que si elle lui est égale.*

**Proposition 12.2** *Deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.*

Démonstration :

- On suppose que $M$ et $N$ sont les matrices d'un même endomorphisme $u$, de l'espace vectoriel $E$ de dimension $n$, dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$, $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u)$. Donc
$$PNP^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) = M.$$
Les matrices $M$ et $N$ sont bien semblables.
- Réciproquement, supposons que $M$ et $N$ sont semblables. Il existe $P$ inversible telle que $M = PNP^{-1}$. Choisissons pour $E$ l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{K})$, identifié à $\mathbb{K}^n$. On peut associer canoniquement à $M$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ (note [1]
$$\begin{array}{cccc} \Phi_M & : & \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & X & \mapsto & MX \end{array}$$

1. Il n'y a pas de notation officielle pour cet endomorphisme, même si le programme préconise que les étudiants doivent savoir l'utiliser. Très souvent, dans les sujets de l'Ecole Polytechnique par exemple, on identifie $M$ et $\Phi_M$. Surtout, tout le monde identifie Ker $\Phi_M$ et Ker $M$, Im $\Phi_M$ et Im $M$. Ce sont les définitions de Ker $M$ et Im $M$, même si on ne parle pas de l'endomorphisme canoniquement associé.

Il est de plus à noter que l'application $M \mapsto \Phi_M$ réalise un isomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ sur $L(\mathbb{K}^n$.

Notons $\mathcal{C}$ la base canoqique de $\mathbb{K}^n$, et $\mathcal{B}$ la base formée par les vecteurs colonnes de $P$. Alors $P$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, $M$ est la matrice de $\Phi_M$ dans la base $\mathcal{C}$, et finalement $N = P^{-1}MP$ est la matrice de $\Phi_M$ dans la base $\mathcal{B}$.
$M$ et $N$ sont bien les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

## 12.1.2 Sous-espaces stables par un endomorphisme

### 12.1.2.1 Stabilité

**Définition 12.2** *Soit $u$ un endomorphisme de $L(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F$ est stable par $u$ si et seulement si : $u(F) \subset F$.*

Exemple : toute intersection de sous-espaces stables par $u$ est un sous-espace stable par $u$. En particulier étant donné une partie $S$ il existe une plus petite partie stable par $u$ et contenant $S$. Par exemple il existe un plus petit sous-espace stable par $u$ contenant un vecteur $x$ donné. On montrerait que c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{u^k(x); k \in \mathbb{N}\}$.

**Définition 12.3** *Si $F$ est un sous-espace stable par $u$, l'endomorphisme de $F$ $\tilde{u}_F : x \mapsto u(x)$ s'appelle l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$.*

Remarque : ne pas confondre l'endomorphisme induit et la restriction.

### 12.1.2.2 Si $u$ et $v$ commutent $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont stables par $v$

Si $u$ est un endomorphisme on vérifie aisément que $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont stables par $u$. On a un résultat plus général :

**Théorème 12.1** *Soient $u$ et $v$ deux éléments de $L(E)$. On suppose que $u$ et $v$ commutent. Dans ces conditions* $\mathrm{Im}\, u$ *et* $\mathrm{Ker}\, u$ *sont stables par $v$.*

Remarque : La réciproque est fausse $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ peuvent être stables par $v$, sans que $u$ et $v$ ne commutent.

### 12.1.2.3 Caractérisation matricielle

**Proposition 12.3** *Soit $F$ un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie, $G$ un supplémentaire de $F$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. Alors $F$ est stable par $u$ si et seulement si la matrice de $u$ dans cette base est de la forme*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

*où $A$ est une matrice carrée de taille* $\dim F$ *($C$ est alors une matrice carrée de taille* $\dim G$*).*

De même $G$ sera stable si et seulement si la matrice de $u$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

.

Dans le premier cas $A$ est la matrice de l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$. La matrice

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

est la matrice de la restriction de $u$ à $G$ (dans des bases naturelles), et finalement $C$ est la matrice de la $\pi \circ u_{|F}$ où $\pi$ est la projection sur $G$ parallèlement à $F$. On a un résultat similaire dans le deuxième cas.

**Proposition 12.4** *Le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

*est égal à* $\det A \det C$. *Ce résultat peut s'étendre à une matrice triangulaire par blocs, et en particulier diagonale par blocs.*

**Proposition 12.5** *Soient* $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ *un famille de sous-espaces vectoriels de* $E$ *telle que* $E = \oplus E_i$. *Soit* $B$ *une base de* $E$ *une base adaptée à cette décomposition . Un endomorphisme* $u$ *de* $L(E)$ *laisse stable chacun des sous-espaces* $E_i$ *si et seulement si sa matrice dans la base* $B$ *est diagonale par blocs, c'est à dire de la forme :*

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix},$$

*où chaque* $M_i$ *est une matrice carrée dont la taille est égale à la dimension de* $E_i$. *De plus* $M_i$ *est alors la matrice dans la partie de* $B$ *qui est la base de* $E_i$ *de l'endomorphisme induit par* $u$ *sur* $E_i$.

**Proposition 12.6** *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* $E$. *La matrice dans la base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *d'un endomorphisme* $u$ *de* $E$ *est diagonale si et seulement si* $u$ *laisse globalement invariante chacune des droites engendrées par les* $e_i$.

**Proposition 12.7** *Avec les notations de la question précédente, la matrice dans la base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *d'un endomorphisme* $u$ *de* $E$ *est triangulaire supérieure si et seulement si chaque sous-espace* $F_i = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ *est stable par* $u$.

## 12.2 Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

### 12.2.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

**Proposition 12.8** *Soit* $D$ *une droite vectorielle stable par* $u$. *Alors il existe* $\lambda$ *dans* $\mathbb{K}$ *tel que pour tout* $x$ *de* $D$ $u(x) = \lambda x$.

*Réciproquement soit* $x$ *dans* $E$ *non nul tel qu'il existe* $\lambda$ *dans* $\mathbb{K}$ *avec* $u(x) = \lambda x$, *alors* $x$ *engendre une droite vectorielle stable par* $u$.

**Définition 12.4** *Soit* $u$ *un endomorphisme de* $L(E)$ *on dit que* $\lambda$ *est valeur propre de* $u$ *si* $u - \lambda Id_E$ *n'est pas injectif, c'est à dire si* $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E)$ *n'est pas réduit à* $\{0\}$, *ce qui équivaut à dire qu'il existe* $x$ *non nul avec* $u(x) = \lambda x$.

**Proposition 12.9** *Si* $E$ *est de dimension finie et* $u \in L(E)$, *alors* $\lambda$ *est valeur propre de* $u$ *si et seulement si* $u - \lambda Id_E$ *n'est pas inversible.*

Culture : en dimension quelconque un $\lambda$ tel que $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible s'appelle une valeur spectrale (notion hors-programme).

**Proposition 12.10** *Si* $E$ *est de dimension finie* $u \in L(E)$, *alors* $\lambda$ *est valeur propre de* $u$ *si et seulement si* $\det(u - \lambda Id_E) = 0$.

**Définition 12.5** *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie $u$ s'appelle son spectre, noté* $\mathrm{Sp}(u)$.

Culture : en dimension quelconque, le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs spectrales.

**Définition 12.6** *Si $u \in L(E)$, on appelle vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ tout $x$ non nul de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$.*

**Définition 12.7** *Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$, on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ le sous-espace* $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E)$.

**Théorème 12.2** *Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont $p$ valeurs propres distinctes de $u \in L(E)$ les sous-espaces propres associés sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.*

**Corollaire 12.1** *Si $u$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$, alors le spectre de $u$ est fini et de cardinal inférieur ou égal à $n$.*

**Proposition 12.11** *Si $u$ et $v$ commutent alors tous sous-espace propre de $u$ est stable par $v$.*

Il suffit de remarquer que si $u$ et $v$ commutent il en est de même de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ et $v$. donc $\ker u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est stable par $v$, pour tout $\lambda$ de $\mathbb{K}$, en particulier pour toutes les valeurs propres de $u$.

### 12.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

**Définition 12.8** *Soit $M$ une matrice de $Mn(K)$, on appelle valeur propre de $M$ tout élément $\lambda$ de $\mathbb{K}$ tel que $M - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.*

**Proposition 12.12** *$\lambda$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $\lambda$ est valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à $M$.*

**Définition 12.9** *On dit qu'un vecteur colonne $X$ de $Kn$ est vecteur propre de la matrice $M$ pour la valeur propre $\lambda$ si $MX = \lambda X$ et $X \neq 0$.*

Remarque : $X$ est donc vecteur propre de $M$ si et seulement si c'est un vecteur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à $M$.

**Définition 12.10** *Si $\lambda$ est valeur propre de $M$, $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) = \{X; MX = \lambda X\}$ est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui s'appelle le sous-espace propre de $M$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

C'est le sous-espace propre de $\Phi_M$ associé à $\lambda$.

**Proposition 12.13** *Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$, tout élément $M$ de $M_n(\mathbb{K})$ peut être considéré comme un élément de $M_n(\mathbb{K}')$. Le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est alors contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$.*

Ce résultat sera généralement utilisé avec $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On parlera souvent des valeurs propres complexes d'une matrice réelle.

**Proposition 12.14** *Soit $P$dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$. $M$ et $PMP^{-1}$ ont même valeurs propres, de plus $E_\lambda(PMP^{-1}) = P(E_\lambda(M)$.*

Deux matrices semblables ont donc même spectre, on verra qu'on peut être plus précis plus tard, et aussi que la réciproque est fausse.

## 12.3 Polynome caractéristique

**Définition 12.11** *On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $M$ le polynôme $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.*

**Exercice 1:** Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice de $M_n(\mathbb{K})$, dite matrice compagnon (ou compagne) :

$$M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra éventuellement supposer que les $s_i$ sont non-nuls, ce qui n'est pas nécessaire.

**Théorème 12.3** *Si $u$ est un endomorphisme de $L(E)$, on appelle polynôme caractéristique de $u$ le polynôme caractéristique de la matrice de $u$ dans une base quelconque. (Si $\mathbb{K}$ est infini) C'est l'unique polynôme $\chi_u(X)$ tel que $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda Id_E - u)$ pour tout $\lambda$ de $\mathbb{K}$.*

Certains coefficients du polynôme caractéristique doivent être connus.

**Proposition 12.15** *Si $u$ est un endomorphisme et $M$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ :*

$$\chi_u = X^n - (\text{tr } u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$$
$$\chi_M = X^n - (\text{tr } M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$$

D'une manière générale tous les coefficients de $\chi_M$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de $M$. En particulier ce sont des fonctions continues de $M$, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Même plus l'application $M \mapsto \chi_M$, à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$, qui est de dimension finie, est continue car chacune de ses coordonnées dans une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est continue.

**Proposition 12.16** *Les valeurs propres d'un endomorphisme où d'une matrice sont les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique.*

**Définition 12.12** *On appelle multiplicité d'une valeur propre (d'un endomorphisme ou d'une matrice) la multiplicité de cette valeur propre comme racine du polynôme caractéristique.*

**Proposition 12.17** *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique. Si $E$ est somme directe d'une famille de sous-espaces stables, le polynôme caractéristique est le produit des polynômes carctéristiques des endomorphismes induits.*

**Corollaire 12.2** *La dimension d'un sous-espace propre est toujours inférieure à la multiplicité de la valeur propre associée.*

**Proposition 12.18** *Lorsque le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme est scindé, la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, et le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité.*

**Corollaire 12.3** *Si le corps de base est $\mathbb{C}$ et si la dimension de $E$ est au moins $1$, tout endomorphisme de $E$ possède au moins une valeur propre.*

## 12.4 Endomorphismes et matrices diagonalisables

**Définition 12.13** *Soit $u \in L(E)$, u est dit diagonalisable s'il existe une base formée de vecteurs propres de u.La matrice de u dans cette base est alors diagonale.*

**Théorème 12.4** *L'endomorphisme u de $L(E)$, est diagonalisable si et seulement si E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u.*

On a déjà vu que la somme de sous-espaces associés à des valeurs propres distinctes était directe. La somme des sous-espaces propres est clairement le sous-espace engendré par l'ensemble des vecteurs propres.

Si $u$ est diagonalisable, on peut à l'aide des vecteurs propres construire une base de $E$, donc le sous-espace engendré par les vecteurs propres est $E$.

Réciproquement si $E$ est la somme des sous-espaces propres alors il est engendré par l'ensemble des vecteurs propres et on peut donc construire à partir de cet ensemble une base de vecteurs propres. Dons $u$ est diagonalisable.

**Théorème 12.5** *Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples alors u est diagonalisable.*

Si $n$ est la dimension de l'espace $E$ alors $u$ possède $n$ sous-espaces propres, qui sont de dimension au moins égale à 1. La dimension de leur somme est au moins $n$. Cette somme est donc égale à $E$. par conséquent $u$ est diagonalisable. On remarquera que dans ce cas la dimension de chaque sous-espace propre est automatiquement exactement égale à 1.

Remarque : Cette condition n'est pas nécessaire. On peut par exemple considérer le cas de l'application nulle.

**Théorème 12.6** *Soit u un endomorphisme de $L(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, alors u est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé toute valeur propre est égale sa multiplicité.*

D'après ce qui a précédé $u$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (condition nécessaire) et chaque $\oplus E\lambda_k = E$.

**Définition 12.14** *Une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si son endomorphisme associé est diagonalisable, c'est-à-dire ssi elle est semblable à une matrice diagonale.*

**Théorème 12.7** *On a les mêmes conditions suffisantes de diagonalisation, ainsi que les mêmes conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation que dans le cas des endomorphismes en utilisant l'isomorphisme d'algèbres entre $M_n(\mathbb{K})$ et $L(\mathbb{K}^n)$.*

**Théorème 12.8** *Soit M une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{K})$, soit $B = (C_1, \ldots, C_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres, non nécessairement distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de M. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $C_i$, c'est à dire la matrice de passage de la base canonique de $K^n$ à la base B. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\lambda_i$, alors on peut écrire : $M = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}MP$.*

Application au calcul de la puissance d'une matrice : Soit $M$ une matrice diagonalisable. On garde les notations du théorème précédent. Alors si n est un entier : $M^n = PD^nP^{-1}$.

**Lemme 12.1** *Soit $A$ une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$, l'application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $M_n(\mathbb{K})$ qui à $X$ associe $PXP^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbre, continu car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.*

Application au calcul de l'exponentielle d'une matrice : Avec les notations précédentes, la série, dans $M_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(M) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} M^p$$

est absolument convergente et donc convergente. Sa somme vaut $P\exp(D)P^{-1}$, et $\exp(D)$ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les exponentielles des termes diagonaux de $D$.

## 12.5 Endomorphismes et matrices trigonalisables

**Théorème 12.9** *Soit $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure ( ou inférieure ). Les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de $u$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

**Corollaire 12.4** *Si $u$ est endomorphisme d'un espace vectoriel complexe $E$ de dimension finie, il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure.*

**Corollaire 12.5** *Si $E$ est un espace vectoriel complexe de dimension finie au moins égale à un, tout endomorphisme de $E$ possède au moins un vecteur propre.*

**Définition 12.15** *Une matrice est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire si et seulement si elle est la matrice d'un endomorphisme trigonalisable.*

**Théorème 12.10** *Soit $M$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe une matrice inversible $P$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ sont alors les valeurs propres de $M$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Remarque : Ce théorème pourrait être énoncé avec des matrices triangulaires inférieures.

**Corollaire 12.6** *Dans $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à une matrice triangulaire.*

**Corollaire 12.7** *Si $M$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres et son déterminant au produit des valeurs propres. Il en est de même pour un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe.*

Remarque : Toute matrice à coefficients réels pouvant être interprétée comme une matrice à coefficients complexes le résultat précédent reste valable à condition de compter aussi les valeurs propres complexes.

## 12.6 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

**Définition 12.16** *Un endomorphisme $u$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est nilpotent si et seulement si il existe un entier $p$ tels que $u^p = 0$. Le plus petit entier $k$ tel que $u^k = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de $u$.*

Si $p$ est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme $u$ et si $p \geq 1$ (ce qui est toujours le cas si $E \neq \{0\}$, car $u^0 = \mathrm{Id}_E$) on aura $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

**Définition 12.17** *Une matrice $M$ de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe un entier $p$ tels que $M^p = 0$. Le plus petit entier $k$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de $M$.*

Si $p$ est l'indice de nilpotence de la matrice $M$ de $M_n(\mathbb{K})$ et si $p \geq 1$ (ce qui est toujours le cas si $n \neq \{0\}$, car $M^0 = I_n$) on aura $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.

**Théorème 12.11** *Un endomorphisme (resp. une matrice) est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable (resp. elle est trigonalisable) et sa seule valeur propre est* $0$.

Il existe au moins quatre démonstrations possibles.

- Une démonstration passant par les matrices à coefficients complexes (valable si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. C'est celle que nous ferons ici.
- Une démonstration calquant la démonstration de trigonalisation d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé.
- Une démonstration utilisant les noyaux emboîtés.
- Une démonstration les polynômes d'endomorphismes. C'est la plus rapide et c'est celle que l'on verra plus loin et qu'il faut retenir.

**Proposition 12.19** *Si $u$ est un endomorphisme nilpotent de $E$, alors son indice de nilpotence est inférieur à $\dim E$. Si $M$, dans $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $n$.*

Le résultat pour les matrices est équivalent au résultat pour les endomorphismes. On verra que pour les matrices le plus rapide est de passer par le théorème de Cayley-Hamilton.

Mais il existe une démonstration pour les endomorphismes qui est directe et doit être connue.

On suppose $E \neq \{0\}$, sinon le résultat est sans intérêt. Si $u$ est nilpotent et si $p$ est son indice de nilpotence alors $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Il existe donc $x$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^p(x) = 0$. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre (exercice classique), donc $p \leq n$.

## 12.7 Polynômes d'un endomorphisme

### 12.7.1 $\mathbb{K}[u]$

**Proposition 12.20** *Soit $\mathbb{L}$ une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire et $a$ un élément de $\mathbb{L}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\Phi_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{L}$ tel que $\Phi_a(X) = a$. C'est l'application qui au polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ associe l'élément $\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \alpha^k$. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ qui s'appelle l'idéal annulateur de $a$. Son image est la plus petite sous-algèbre de $\mathbb{L}$ contenant $a$, on la note $\mathbb{K}[a]$. Elle est commutative.*

On peut appliquer ce résultat à $\mathbb{L} = L(E)$, où $E$ est un espace vectoriel quelconque, et $a = u$ un endomorphisme de $E$, ainsi qu'au cas $\mathbb{L} = M_n(\mathbb{K})$ et $a = M$ est une matrice.

**Proposition 12.21** *Si $u$ et $v$ commutent, il en est de même de $P(u)$ et $v$, pour tout polynôme $P$. En particulier* $\operatorname{Im} P(u)$ *et* $\operatorname{Ker} P(u)$ *sont stables par $v$.*

### 12.7.2 Polynôme minimal

**Proposition 12.22** *Si $E$ est de dimension finie et si $u$ est dans $L(E)$ l'idéal annulateur $calI_u$ de $u$ n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe donc un unique polynôme unitaire $\pi_u$ tel que $calI_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$. ce polynôme s'appelle le polynôme minimal de $u$.*

$M_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie on obtient de même l'existence d'un polynôme minimal d'une matrice.

**Proposition 12.23** *Si $d$ est le degré du polynôme minimal de l'endomorphisme $u$ (supposé exister) alors $(u^k)_{0\leq k\leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.*

On a un résultat similaire pour une matrice $M$.

### 12.7.3 Lien avec les valeurs propre

**Proposition 12.24** *Si $x$ est vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors il est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.*

**Corollaire 12.8** *Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de $u$ est racine de $P$.*

On a toujours les résultats similaires pour les matrices.

### 12.7.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley [2] -Hamilton [3] qui suit, est un théorème clé pour la réduction des endomorphismes.

**Théorème 12.12** *Soit $u$ un endomorphisme de $L(E)$, on a $P_u(u) = 0$.*

Un énoncé équivalent affirme simplement que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique.
Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $M$ la matrice de $u$ dans cette base. Puis que l'application $v \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme d'algèbre de $L(E)$ vers $M_n(\mathbb{K})$ il suffit de prouver que $\chi_u(M) = 0$, où 0 désigne la matrice nulle. On rappelle aussi que $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M$.
On se place dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$ dont l'ensemble des matrices à coefficients dans $K[X]$ est un sous-anneau, noté $M_n(\mathbb{K}[X])$.
En idenfiant chacun de ses coefficients on vérifie facilement que toute matrice $A$ de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont chaque coefficient est un polynôme de degré au plus $d$ se décompose de manière unique sous la forme

$$A = A_0 + XA_1 + \cdots + X^d A_d,$$

où les $A_i$ sont dans $M_n(\mathbb{K})$.
On rappelle aussi que pour toute matrice $A$ de $M_n(k)$ où $k$ est un corps commutatif on a la relation

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\, I_n.$$

2. CAYLEY Arthur, Richmond 1821 - Cambridge 1895
3. HAMILTON William , Dublin 1805 - Dublin 1865

Prenons $A = XI_n - M$, si $B = {}^t\text{Com}(A)$ $B$ est une matrice de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $n-1$. On peut donc écrire

$$B = B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}$$

et d'après la relation sur la comatrice on aura

$$(XI_n - M)(B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}) = \det(XI_n - M)I_n.$$

Effectuons le produit dans le membre de gauche, et écrivons

$$\det(XI_n - M) = a_0 + \cdots + a_nX^n$$

dans le membre de droite. On obtient

$$-MB_0 + X(B_0 - MB_1) + \cdots + M^k(B_{k-1} - MB_k) + \cdots + X^nB_{n-1} = a_0I_n + Xa_1I_n + \cdots + X^na_nI_n.$$

Par uncité de la décomposition on peut affirmer :

$-MB_0 = a_0I_n$
$B_0 - MB_1 = a_1I_n$
$\dots$
$B_{k-1} - MB_k = a_kI_n$
$\dots$
$B_{n-2} - MB_{n-1} = a_{n-1}I_n$
$B_{n-1} = a_nI_n$

En multipliant la $i$-ème ligne par $M^{i-1}$ puis en sommant on obtient

$$-MB_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(M^{k-1}B_{k-1} - M^kB_k) + M^{n-1}B_{n-1} = a_0I_n + \cdots + a_kM^k + \cdots + a_nM^n.$$

C'est-à-dire :

$$0 = \chi_u(M).$$

## 12.8 Théorème de décomposition des noyaux

**Théorème 12.13** *Soit $P$ et $Q$ deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$. Soit $u$ un endomorphisme de $L(E)$. Alors :*

$$\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

**Théorème 12.14** *Soient $(P_1, \dots, P_n)$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux, soit $u$ un endomorphisme de $L(E)$, alors :*

$$\text{Ker } P_1P_2...P_n(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_n(u).$$

## 12.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

**Théorème 12.15** *Une condition nécessaire et suffisante pour que $u$ (resp. $M$) soit diagonalisable est que $u$ (resp. $M$) soit annulé (resp. annulée) par un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples.*

Supposons que $u$ soit diagonalisable. $E$ est alors la somme des sous-espaces propres $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E)$. Or les $(X-\lambda)$ sont deux à deux premiers entre eux on peut donc appliquer le théorème de décomposition des noyaux et

$$E = \oplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda = \oplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\,(u-\lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\left[\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)\right](u).$$

$u$ est bien annulé par le polynôme $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ qui est scindé à racines simples.

Réciproquement, supposons que $u$ soit annulé par le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{\mu\in Z}(X-\mu)$. D'après le théorème de décomposition des noyaux on pourra écrire

$$E = \oplus_{\mu\in Z} \mathrm{Ker}\,(u-\mu \mathrm{Id}_E).$$

On ne peut retenir dans cette somme que les $\mu$ pour lesquels $\mathrm{Ker}\,(u-\mu\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire les $\mu$ qui sont valeurs propres de $u$. L'égalité précédente devient

$$E = \oplus_{\mu\in Z\cap \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\,(u-\mu \mathrm{Id}_E).$$

$E$ sera donc la somme des sous-espaces propres et par conséquent $u$ est diagonalisable.

Le résultat sur les matrices s'obtient en intérprétant $M$ comme la matrice d'un endomorphisme par exemple l'endomorphisme canoniquement associé.

Bien que pratiquement peu utile, un autre énoncé de ce théorème serait :

**Proposition 12.25** *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

**Proposition 12.26** *Soit $u$ un endomorphisme d'un espace de dimension finie $E$, $F$ un sous-espace stable par $u$ et $\tilde{u}_F$ l'endomorphisme induite par $u$ dans $F$. Alors, le polynôme minimal de $\tilde{u}_F$ divise le polynôme minimal de $u$. En particulier si $u$ est diagonalisable $\tilde{u}_F$ est aussi diagonalisable.*

## 12.10 Décomposition $D+N$

**Théorème 12.16** *S'il existe un polynôme scindé qui annule $u$ alors $E$ se décompose en somme directe de sous-espaces stables par $u$ et $u$ induit sur chacun de ces sous-espaces la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.*

En se rappelant que tout endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie est trigonalisable, on en déduit que si $E$ est de dimension finie et si $u$ est annulé par un polynôme scindé alors $u$ est trigonalisable. Bizarrement, ce résultat n'est pas au programme.

Si $E$ est de dimension finie, on obtient le résultat :

**Théorème 12.17** *Tout endomorphisme $u$, annulé par un polynôme scindé, se décompose de manière unique sous la forme $u = d + n$ où $d$ est diagonalisable, $n$ nilpotent et $dn = nd$.*

On peut montrer que de plus $d$ et $u$ sont des polynômes en $u$.

La décomposition précédente, connue sous le nom de décomposition de Dunford, est unique si les trois hypothèses – $d$ est diagonalisable, $n$ nilpotent et $dn = nd$ – sont respectées.

Il est à noté que la décomposition de Dunford est hors-programme, elle doit être en pricipe ramenée au premier théorème.

Il existe un résultat similaire pour les matrices

**Théorème 12.18** *Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$, annulé par un polynôme scindé, est semblable à une matrice $D+N$ où $D$ est diagonale, $N$ nilpotente et $DN = ND$.*