Chapitre 12

Réduction des endomorphismes

12.1 Sous-espaces stables

12.1.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

12.1.1.1 Stabilité

Définition 12.1 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si : $u(F) \subset F$.*

Exemple : toute intersection de sous-espaces stables par u est un sous-espace stable par u. En particulier étant donné une partie S il existe une plus petite partie stable par u et contenant S. Par exemple il existe un plus petit sous-espace stable par u contenant un vecteur x donné. On montrerait que c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{u^k(x); k \in \mathbb{N}\}$.

Définition 12.2 *Si F est un sous-espace stable par u, l'endomorphisme de F $\tilde{u}_F : x \mapsto u(x)$ s'appelle l'endomorphisme induit par u sur F.*

Remarque : ne pas confondre l'endomorphisme induit et la restriction

12.1.1.2 Si u et v commutent $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v

Si u est un endomorphisme on vérifie aisément que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par u. On a un résultat plus général :

Théorème 12.1 *Soient u et v deux éléments de $L(E)$. On suppose que u et v commutent. Dans ces conditions $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.*

Remarque : La réciproque est fausse $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ peuvent être stables par v, sans que u et v ne commutent.

12.1.1.3 Caractérisation matricielle

Proposition 12.1 *Soit F un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie, G un supplémentaire de F et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. Alors F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans cette base est de la forme*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée de taille $\dim F$ (C est alors une matrice carrée de taille $\dim G$).

De même G sera stable si et seulement si le matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

.

Dans le premier cas A est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F. La matrice

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

est la matrice de la restriction de u à G (dans des bases naturelles), et finalement C est la matrice de la $\pi \circ u_{|F}$ où π est la projection sur G parallèlement à F. On a un résultat similaire dans le deuxième cas.

Proposition 12.2 *Le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

est égal à $\det A \det C$*. Ce résultat peut s'étendre à une matrice triangulaire par blocs, et en particulier diagonale par blocs.*

Proposition 12.3 *Soient* $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ *un famille de sous-espaces vectoriels de* E *telle que* $E = \oplus E_i$*. Soit* B *une base de* E *une base adaptée à cette décomposition . Un endomorphisme* u *de* $L(E)$ *laisse stable chacun des sous-espaces* E_i *si et seulement si sa matrice dans la base* B *est diagonale par blocs, c'est à dire de la forme :*

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix},$$

où chaque M_i *est une matrice carrée dont la taille est égale à la dimension de* E_i*. De plus* M_i *est alors la matrice dans la partie de* B *qui est la base de* E_i *de l'endomorphisme induit par* u *sur* E_i*.*

Proposition 12.4 *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*. La matrice dans la base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *d'un endomorphisme* u *de* E *est diagonale si et seulement si* u *laisse globalement invariante chacune des droites engendrées par les* e_i*.*

Proposition 12.5 *Avec les notations de la question précédente, la matrice dans la base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *d'un endomorphisme* u *de* E *est triangulaire supérieure si et seulement si chaque sous-espace* $F_i = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ *est stable par* u*.*

12.1.2 Polynômes d'un endomorphisme

12.1.2.1 $\mathbb{K}[u]$

Théorème 12.2 *Soit* u *un élément de* $L(E)$*. Il existe un unique morphisme d'algèbre de* $\mathbb{K}[X]$ *vers* $L(E)$ *qui envoie* X *sur* u*. L'image de* P *par ce morphisme se note* $P(u)$*. L'image de* $\mathbb{K}[X]$ *par ce morphisme se note* $\mathbb{K}[u]$*. C'est la plus petite sous-algèbre de* $L(E)$ *contenant* u*. Elle est commutative. Le noyau de ce morphisme est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *qui s'appelle l'idéal des polynômes annulateurs de* u*. Si cet idéal n'est pas réduit à* $\{0\}$ *il est engendré par un unique polynôme unitaire qu'on appelle le polynôme minimal de* u*. Si* E *est de dimension finie tout endomorphisme possède un polynôme minimal.*

Proposition 12.6 *Si* u *et* v *commutent, il en est de même de* $P(u)$ *et* v*, pour tout polynôme* P*. En particulier* $\mathrm{Im}\ P(u)$ *et* $\mathrm{Ker}\ P(u)$ *sont stables par* v*.*

12.1.2.2 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 12.3 *Soit* P *et* Q *deux polynômes premiers entre eux de* $\mathbb{K}[X]$*. Soit* u *un endomorphisme de* $L(E)$*. Alors :*

$$\mathrm{Ker}\ PQ(u) = \mathrm{Ker}\ P(u) \oplus \mathrm{Ker}\ Q(u).$$

Théorème 12.4 *Soient* $(P_1, \ldots, P_n)$ *des polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux deux à deux, soit* u *un endomorphisme de* $L(E)$*, alors :*

$$\mathrm{Ker}\ P_1P_2...P_n(u) = \mathrm{Ker}\ P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\ P_2(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\ P_n(u).$$

12.2 Réduction d'un endomorphisme

12.2.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 12.3 *Soit* u *un endomorphisme de* $L(E)$ *on dit que* λ *est valeur prore de* u *si* $u - \lambda Id_E$ *n'est pas injectif, c'est à dire si* $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E)$ *n'est pas réduit à* $\{0\}$*.*

Proposition 12.7 *Soit $u \in L(E)$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible.*

Proposition 12.8 *Soit $u \in L(E)$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si* $\det(u - \lambda Id_E) = 0$.

Définition 12.4 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u s'appelle son spectre, noté* $\mathrm{Sp}(u)$.

Définition 12.5 *Soit λ une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace* $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E)$.

Définition 12.6 *Si $u \in L(E)$, on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ tout x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$. Tout vecteur propre engendre une droite stable par u.Réciproquement toute droite stable par u est engendrée par un vecteur propre.*

Proposition 12.9 *Si x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors il est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.*

Corollaire 12.1 *Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de u est racine de P.*

Théorème 12.5 *Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont p valeurs propres distinctes de $u \in L(E)$ les sous-espaces propres associés sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.*

Proposition 12.10 *Si F est un sous-espace stable par u et si $\tilde{u}_F$ est l'endomorphisme induit par u sur F, alors toute valeur propre λ de $\tilde{u}_F$ est valeur propre de u et $F_\lambda(\tilde{u}_F) = F \cap E_\lambda(u)$.*

Proposition 12.11 *Soit a un automorphisme de E, alors l'application $u \mapsto aua^{-1}$ est un automorphisme de $L(E)$. u et aua^{-1} ont même valeurs propres, de plus $E_\lambda(aua^{-1}) = a(E_\lambda(u)$.*

12.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Définition 12.7 *Soit M une matrice de $Mn(K)$, on appelle valeur propre de M tout élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $M - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.*

Définition 12.8 *A toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ on peut associer un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^n$ par $X \mapsto MX$, en identifiant $\mathbb{K}^n$ avec $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et cette application est un isomorphisme de l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ vers $L(\mathbb{K}^n)$.*

Proposition 12.12 *λ est valeur propre de M si et seulement si λ est valeur propre de l'endomorphisme associé.*

Définition 12.9 *On dit qu'un vecteur colonne X de Kn est vecteur propre de la matrice M pour la valeur propre λ si $MX = \lambda X$ et $X \neq 0$.*

Remarque : X est donc vecteur propre de M si et seulement si c'est un vecteur propre de l'endomorphisme associé à M.

Définition 12.10 *Si λ est valeur propre de M,* $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) = \{X; MX = \lambda X\}$ *est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui s'appelle le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.*

Proposition 12.13 *Tout élément de M de $M_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$. La spectre de M dans $\mathbb{R}$ est alors contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 12.14 *Soit Pdans $GL_n(\mathbb{K})$, alors l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$. M et PMP^{-1} ont même valeurs propres, de plus $E_\lambda(PMP^{-1}) = P(E_\lambda(M)$.*

Deux matrices semblables ont donc même spectre, on verra qu'on peut être plus précis plus tard.

12.2.3 Polynome caractéristique

Définition 12.11 *On appelle polynôme caractéristique d'une matrice M le polynôme* $P_M(X) = \det(M - XI_n)$.

Exercice 1: Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice de $M_n(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra éventuellement supposer que les s_i sont non-nuls, ce qui n'est pas nécessaire.

Théorème 12.6 *Si u est un endomorphisme de $L(E)$, on appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base quelconque. (Si $\mathbb{K}$ est infini) C'est l'unique polynôme $P_u(X)$ tel que $P_u(\lambda) = \det(u - \lambda Id_E)$ pour tout λ de $\mathbb{K}$.*

Coefficients faciles à déterminer du polynôme caractéristique.

Proposition 12.15 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique. Si E est somme directe d'une famille de sous-espaces stables, le polynôme caractéristique est le produit des polynômes carctéristiques des endomorphismes induits.*

Corollaire 12.2 *La dimension d'un sous-espace propre est toujours inférieure à la multiplicité de la valeur propre associée.*

Proposition 12.16 *Les valeurs propres d'un endomorphisme où d'une matrice sont les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique.*

Définition 12.12 *Si $u \in L(E)$ et si λ est une valeur propre de u, on appelle multiplicité de λ comme valeur propre de u la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique. La définition est similaire pour une matrice.*

Proposition 12.17 *Lorsque le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme est scindé, la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, et le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité.*

Corollaire 12.3 *Si le corps de base est $\mathbb{C}$ et si la dimension de E est au moins 1, tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.*

12.2.3.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley [1] -Hamilton [2] qui suit, est un théorème clé pour la réduction des endomorphismes.

Théorème 12.7 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$, on a $P_u(u) = 0$.*

Un énoncé équivalent affirme simplement que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans cette base. Puis que l'application $v \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme d'algèbre de $L(E)$ vers $M_n(\mathbb{K})$ il suffit de prouver que $P_u(M) = 0$, où 0 désigne la matrice nulle. On rappelle aussi que $P_u(X) = \det(M - X\mathrm{I}_n$.

On se place dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$ dont l'ensemble des matrices à coefficients dans $K[X]$ est un sous-anneau, noté $M_n(\mathbb{K}[X])$.

En idenfiant chacun de ses coefficients on vérifie facilement que toute matrice A de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont chaque coefficient est un polynôme de degré au plus d se décompose de manière unique sous la forme

$$A = A_0 + XA_1 + \cdots + X^d A_d,$$

où les A_i sont dans $M_n(\mathbb{K})$.

On rappelle aussi que pour toute matrice A de $M_n(k)$ où k est un corps commutatif on a la relation

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\, I_n.$$

1. CAYLEY Arthur, Richmond 1821 - Cambridge 1895
2. HAMILTON William , Dublin 1805 - Dublin 1865

Prenons $A = M - XI_n$, si $B = {}^t\text{Com}(A)$ B est une matrice de $M_n(\mathbb{K}[X])$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $n-1$. On peut donc écrire

$$B = B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}$$

et d'après la realtion sur la comatrice on aura

$$(M - XI_n)(B_0 + \cdots + X^{n-1}B_{n-1}) = \det(M - XI_n)I_n.$$

Effectuons le produit dans le membre de gauche, et écrivons

$$\det(M - XI_n) = a_0 + \cdots + a_nX^n$$

dans le membre de droite. On obtient

$$MB_0 + X(MB_1 - B_O) + \cdots + M^k(MB_k - B_{k-1}) + \cdots - X^nB_{n-1} = a_0I_n + Xa_1I_n + \cdots + X^na_nI_n.$$

Par uncité de la décomposition on peut affirmer :

$MB_0 = a_0I_n$
$MB_1 - B_0 = a_1I_n$
$\ldots$
$MB_k - B_{k-1} = a_kI_n$
$\ldots$
$MB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1}I_n$
$-B_{n-1} = a_nI_n$

En multipliant la i-ème ligne par M^{i-1} puis en sommant on obtient

$$MB_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(M^kB_k - M^{k-1}B_{k-1}) - M^{n-1}B_{n-1} = a_0I_n + \cdots + a_kM^k + \cdots + a_nM^n.$$

C'est-à-dire :

$$O = P_u(M).$$

12.2.4 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

12.2.4.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 12.13 *Soit $u \in L(E)$, u est dit diagonalisable s'il existe une base formée de vecteurs propres de u.La matrice de u dans cette base est alors diagonale.*

Théorème 12.8 *L'endomorphisme u de $L(E)$, est diagonalisable si et seulement si E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u.*

On a déjà vu que la somme de sous-espaces associés à des valeurs propres distinctes était directe. La somme des sous-espaces propres est clairement le sous-espace engendré par l'ensemble des vecteurs propres.

Si u est diagonalisable, on peut à l'aide des vecteurs propres construire une base de E, donc le sous-espace engendré par les vecteurs propres est E.

Réciproquement si E est la somme des sous-espaces propres alors il est engendré par l'ensemble des vecteurs propres et on peut donc construire à partir de cet ensemble une base de vecteurs propres. Dons u est diagonalisable.

Théorème 12.9 *Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples alors u est diagonalisable.*

Si n est la dimension de l'espace E alors u possède n sous-espaces propres, qui sont de dimension au moins égale à 1. La dimension de leur somme est au moins n. Cette somme est donc égale à E. par conséquent u est diagonalisable. On remarquera que dans ce cas la dimension de chaque sous-espace propre est automatiquement exactement égale à 1.

Remarque : Cette condition n'est pas nécessaire. On peut par exemple considérer le cas de l'application nulle.

Théorème 12.10 *Une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable est que u soit annulé par un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples.*

Supposons que u soit diagonalisable. E est alors la somme des sous-espaces propres $E_\lambda = \text{Ker}\,(u - \lambda \text{Id}_E)$. Or les $(X - \lambda)$ sont deux à deux premiers entre eux on peut donc appliquer le théorème de décomposition des noyaux et

$$E = \oplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda = \oplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}\,(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}\left[\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)\right](u).$$

u est bien annulé par le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)}(X - \lambda)$ qui est scindé à racines simples.

Réciproquement, supposons que u soit annulé par le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{\mu \in Z}(X - \mu)$. D'après le théorème de décomposition des noyaux on pourra écrire

$$E = \oplus_{\mu \in Z} \text{Ker}\,(u - \mu \text{Id}_E).$$

On ne peut retenir dans cette somme que les μ pour lesquels $\text{Ker}\,(u - \mu \text{Id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire les μ qui sont valeurs propres de u. L'égalité précédente devient

$$E = \oplus_{\mu \in Z \cap \text{Sp}(u)} \text{Ker}\,(u - \mu \text{Id}_E).$$

E sera donc la somme des sous-espaces propres et par conséquent u est diagonalisable.

Bien que pratiquement peu utile, un autre énoncé de ce théorème serait : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Théorème 12.11 *Soit u un endomorphisme de $L(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, alors u est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé toute valeur propre est égale sa multiplicité.*

D'après ce qui a précédé u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (condition nécessaire) et chaque $\oplus E\lambda_k = E$.

Théorème 12.12 *Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (ou inférieure). Les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Corollaire 12.4 *Si u est endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.*

Corollaire 12.5 *Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie au moins égale à un, tout endomorphisme de E possède au moins un vecteur propre.*

Définition 12.14 *Une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si son endomorphisme associé est diagonalisable, c'est-à-dire ssi elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 12.13 *On a les mêmes conditions suffisantes de diagonalisation, ainsi que les mêmes conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation que dans le cas des endomorphismes en utilisant l'isomorphisme d'algèbres entre $M_n(\mathbb{K})$ et $L(\mathbb{K}^n)$.*

Théorème 12.14 *Soit M une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{K})$, soit $B = (C_1, \ldots, C_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres, non nécessairement distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de M. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les C_i, c'est à dire la matrice de passage de la base canonique de K^n à la base B. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i, alors on peut écrire : $M = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}MP$.*

Application au calcul de la puissance d'une matrice : Soit M une matrice diagonalisable. On garde les notations du théorème précédent. Alors si n est un entier : $M^n = PD^nP^{-1}$.

Lemme 12.1 *Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$, l'application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $M_n(\mathbb{K})$ qui à X associe PXP^{-1} est un isomorphisme d'algèbre, continu car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.*

Application au calcul de l'exponentielle d'une matrice : Avec les notations précédentes, la série, dans $M_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(M) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} M^p$$

est absolument convergente et donc convergente. Sa somme vaut $P \exp(D) P^{-1}$, et $\exp(D)$ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les exponentielles des termes diagonaux de D.

On peut étendre aussi la trigonalisation.

Définition 12.15 *Une matrice est trigonalisable si et seulemnt si elle est semblable à une matrice tringulaire supérieure, c'est-à-dire si et seulement si elle est la matrice d'un endomorphisme trigonalisable.*

Théorème 12.15 *Soit M une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ sont alors les valeurs propres de M comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Remarque : Ce théorème pourrait être énoncé avec des matrices triangulaires inférieures.

Corollaire 12.6 *Dans $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à une matrice triangulaire.*

Corollaire 12.7 *Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres et son déterminant au produit des valeurs propres. Il en est de même pour un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe.*

Remarque : Toute matrice à coefficients réels pouvant être interprétée comme une matrice à coefficients complexes le résultat précédent reste valable à condition de compter aussi les valeurs propres complexes.

12.3 Compléments

12.3.1 Sous-espaces caractéristiques

12.3.2 Décomposition $D + N$

Théorème 12.16 *Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice $D + N$ où D est diagonale, N nilpotente et $DN = ND$.*

Théorème 12.17 *Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose de manière unique sous la forme $u = d + n$ où d est diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$.*

De plus d et u sont des polynômes en u.