Points à connaître

Une liste des points du programme à connaître. En gras les points qui me paraissent plus fondamentaux.

Les énoncés sont souvent volontairement très flous pour vous obliger à préciser le contexte.

Lorsqu'on vous demande l'énoncé et la démonstration, l'énoncé précis est indispensable mais la démonstration n'est pas aussi importante.

Point 1 : Enoncé et démonstration du théorème de Cesàro.

Point 2 : Définition de deux suites adjacentes. Démonstration de la convergence de ces suites vers une limite commune.

Point 3 : Enoncé et démonstration du théorème de Weierstrass dans le cas de $\mathbb{R}$.

Point 4 : Développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre n.

Point 5 : L'alphabet grec.

Point 6 : Etude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est croissante et continue sur un intervalle stable. Justification de la convergence. Caractérisation de la limite

Point 7 : Définition des relations de domination, de prépondérance et d'équivalence entre suites de nombres réels et complexes. Propriétés principales

Point 8 : Définition d'une série dans un espace vectoriel, d'une série convergente de nombres complexes

Point 9 : Définition d'une série absolument convergente de nombres complexes. Une série absolument convergente de nombres complexes est convergente.

Point 10 : Caractérisation de la convergence d'une série à terme positifs. Prouver une série à termes positifs dont le terme général est majoré par celui d'une série convergente est convergente.

Point 11 : Enoncé du critère de comparaison logarithmique. Démonstration

Point 12 : Enoncé du théorème sur l'usage des relations de comparaison dans l'étude de la convergence des séries à termes positifs.

Point 13 : Enoncé de la règle de d'Alembert.

Point 14 : Enoncé de la règle de Riemann.

Point 15 : Enoncé du théorème du cours sur la comparaison d'une série et d'une intégrale.

Point 16 : Enoncé du théorème sur la sommation des relations de comparaison.

Point 17 : Enoncé du critère spécial de convergence pour les séries alternées, avec les résultats annexes.

Point 18 : Etablir un développement de $\exp x$, pour x réel sous la forme de la somme d'une série en utilisant la formule de Taylor.

Point 19 : Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe (avec justification).

Point 20 : Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1)$, où γ est un réel.

Point 21 : Prouver $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (Démonstartion élémentaire, démonstration par extension du duveloppement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et démonstarion utilisant le théorème de convergence dominée).

Point 22 : Nature de la série de terme général $1 - \exp\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ en fonction du paramètre α.

Point 23 : Développement limité de cos et sin en 0, à l'ordre n.

Point 24 : Définition du produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes. Enoncé du théorème fondamental sur la convergence.

Point 25 : Enoncé du théorème sur la permutation des sommations d'une suite double.

Point 26 : Enoncé de la formule de Taylor avec reste intégrale.

Point 27 : Définition de la limite d'une fonction en un point.

Point 28 : Définition de la continuité en un point. Définition à l'aide de quantificateurs de la continuité sur une partie.

Point 29 : Définition d'un ouvert. Propriétés ensemblistes des ouverts. Justification.

Point 30 : Définition de l'adhérence d'une partie. Enoncé de la caractérisation séquentielle.

Point 31 : Définition de l'adhérence d'une partie. Enoncé de la caractérisation métrique.

Point 32 : Définition d'une norme. Montrer que la norme est 1-lipschitzienne.

Point 33 : Définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions. Montrer que l'une implique l'autre.

Point 34 : Définition de la convergence normale d'une série de fonctions. Critère de caractérisation. Dans le cas des fonctions à valeurs complexes montrer qu'elle implique la convergence uniforme

Point 35 : Enoncer le théorème de permutations des limites pour une suite de fonctions, puis pour une séries de fonctions (à valeurs réelles ou complexes).

Point 36 : Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Point 37 : Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Point 38 : Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.

Point 39 : Montrer que $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Point 40 : Démontrer que la suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite si $\alpha \in]0, \pi[$.

Point 41 : Enoncer le théorème sur l'intégration sur un segment d'une suite de fonctions.

Point 42 : Enoncer le théorème sur la dérivation de la somme d'une série de fonctions.

Point 43 : Montrer que la fonction $\zeta x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Point 44 : Montrer que la fonction $\psi x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Point 45 : Enoncé du théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction continue à valeurs complexes.

Point 46 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Point 47 : Equivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ en $+\infty$.

Point 48 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Point 49 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Point 50 : Equivalent en $+\infty$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

Point 51 : Limite en 0^+ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

Point 52 : Equivalent en 0^+ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

Point 53 : Enoncé du lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence d'une série entière.

Point 54 : Utilisation de la règle de d'Alembert pour la détermination du rayon de convergence d'une série entière.

Point 55 : Enoncé du théorème sur la continuité de la somme d'une série entière.

Point 56 : Enoncé du théorème sur l'intégrabilité de la somme d'une série entière.

Point 57 : Enoncé du théorème sur la dérivabilité de la somme d'une série entière.

Point 58 : Définition d'une fonction développable en série entière.

Point 59 : Développement en série entière de sin et cos. Justification pour l'une des deux.

Point 60 : Développement en série entière de $\ln(1+x)$. Justification.

Point 61 : Supposant connu le développement en série entière de $\ln(1+x)$ sur $]-1, 1[$ expliquer pourquoi il reste valide sur $]-1, 1]$.

Point 62 : Développement en série entière de $\arctan x$. Justification..

Point 63 : Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, sans justification.

Point 64 : Développement en série entière de $\frac{1}{1-2\cos\theta x+x^2}$, $\theta \in]0, \pi[$.

Point 65 : Développement en série entière de $\arcsin x$.

Point 66 : Enoncé du théorème de Rolle

Point 67 : Enoncé et démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii, dans le cadre d'un espace préhilbertion complexe.

Point 68 : Prouver l'existence d'une base orthonormale d'un espace hermitien, en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Point 69 : Exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel ou complexe à l'aide d'une base orthonormale et à l'aide d'une base orthogonale.

Point 70 : Développement en série entière de ch, sh et argth, sans justification.

Point 71 : Caractérisation d'une application linéaire continue.

Point 72 : Caractérisation d'une application bilinéaire continue. Donner trois exemples classiques.

Point 73 : Definition de l'équivalence des normes.

Point 74 : Définition séquentielle d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé

Point 75 : Donner les trois propriétés importantes vérifiées par les fonctions continues sur un compact.

Point 76 : Définition d'une application uniformément continue, d'une application lipschitzienne. Montrer qu'une de ces propriétés implique l'autre mais que la réciproque est fausse.

Point 77 : Démontrer que toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

Point 78 : Citez les cinq propriétés vérifiées par les espaces vectoriels de dimension finie.

Point 79 : Si u est un endomorphisme d'un espace de dimension fine, montrer que $\exp u$ est défini.

Point 80 : Définir une partie connexe par arcs.

Point 81 : Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

Point 82 : Enoncé le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles.

Point 83 : Démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles, de classe $\mathcal{C}^1$.

Point 84 : Enoncé et démonstration de la formule de Leibniz sur la dérivation de $B(f,g)$ où B est bilinéaire.

Point 85 : Définition d'une fonction intégrable à valeurs positives.

Point 86 : Définition de l'intégrale impropre d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$.

Point 87 : Prouver qu'une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, positive est intégrable si et seulement si son intégrale impropre converge.

Point 88 : Donner un exemple, en justifiant vos affirmations, d'une fonction non intégrable dont l'intégrale impropre converge.

Point 89 : Enoncer la règle de Riemann pour l'intégrabilité des fonctions positives.

Point 90 : Quand dit-on qu'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes est intégrable ? Comment définit-on alors son intégrale (On pourra commencr par les fonctions à valeurs réelles).

Point 91 : Enoncer le théorème sur le changement de variable dans une intégrale

Point 92 : Enoncer le théorème de convergence dominée

Point 93 : En utilisant le théorème de convergence dominée, écrire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\big(1-\frac{t}{n}\big)^n dt$ sous la forme d'une intégrale.

Point 94 : En utilisant le théorème de dominée, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^t}dt$ et en donner la valeur sous la forme d'une série.

Point 95 : Enoncer le théorème usuel permettant d'intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions

Point 96 : Ecrire $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t+1}dt$ sous la forme de la somme d'une série.

Point 97 : Enoncer le théorème sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 98 : Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)\sqrt{1+t^2}} dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Point 99 : Enoncer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 100 : Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan xtdt}{t(1+t^2)} dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Point 101 : Démontrer le théorème de convergence dominée lorsqu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Point 102 : Démontrer le théorème sur l'intégration de la somme d'une série de fonctions lorqu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Point 103 : Démontrer le théorème sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 104 : Démontrer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Point 105 : Définition d'un groupe, d'un sous-groupe. Caractérisation d'un sous-groupe.

Point 106 : Définition d'un morphisme de groupe de son noyau de son image. Montrer que ce sont des sous-groupes.

Point 107 : Définition de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ si n est un entier non nul. Caractérisation sans démonstration des générateurs du groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$.

Point 108 : Définition d'un groupe cyclique. Montrer que tout groupe cyclique est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Point 109 : Définition d'un idéal dans un anneau commutatif unitaire. Caractérisation

Point 110 : Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n est un entier positif, sans utiliser la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

Point 111 : Montrer que tout idéal non réduit à 0 de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$ où P est un polynôme unitaire et qu'un tel polynôme est unique.

Point 112 : Définition d'un morphisme d'anneaux unitaires, de son image et de son noyau. Que dire de leurs structures algébriques ? Le prouver.

Point 113 : Caractérisation des élements inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (avec la justification).

Point 114 : Si A est un anneau alors l'ensemble A^* de ses éléments inversibles est un groupe pour la multiplication.

Point 115 : Soit n un entier non nul, $\phi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n. Dire ce que représente $\phi(n)$ et montrer que pour tout entier m premier avec n on a $m^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Point 116 : Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $\frac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$ est isomorphe en tant qu'anneau à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$

Point 117 : Définir une combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs, une famille libre, une famille génératrice.

Point 118 : Montrer que la famille $(x \mapsto e^{cx})_{c \in \mathbb{C}}$ est libre.

Point 119 : Donner trois définitions équivalentes de la somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Point 120 : Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans E, montrer qu'il existe une unique application linéaire de E vers H dont les restrictions à F et G sont données.

Point 121 : Enoncer le théorème du rang pour des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Point 122 : Démontrer le théorème du rang pour des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Point 123 : Dans un espace vectoriel de dimension quelconque définir un hyperplan, une équation de cet hyperplan. Prouver que toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles

Point 124 : Définir le rang d'une matrice.

Point 125 : Quand dit-on que deux matrices sont équivalentes ? En donner une interprétation en termes d'applications linéaires.

Point 126 : Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? En donner une interprétation en termes d'endomorphismes.

Point 127 : Montrer que toute matrice de rang r est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Point 128 : Définir la matrice de changement de base. Formuler son effet sur les coordonnée d'un vecteur

Point 129 : Formuler à l'aide des matrices de passage l'effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Point 130 : Formuler à l'aide de la matrice de passage l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Point 131 : Définir la trace d'une matrice carrée. Propriétés. Donner, en la justifiant la définition de la trace d'un endomorphisme.

Point 132 : Lien entre la trace d'un projecteur et son rang. Justifier ce résultat.

Point 133 : Définition d'un polynôme d'un endomorphisme.

Point 134 : Enoncé et démonstration du théorème de décomposition des noyaux.

Point 135 : Définition d'un sous-espace stable. Exemples. Caractérisation matricielle.

Point 136 : Définition des éléments propres d'un endomorphisme.

Point 137 : Démontrer que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Point 138 : Définition du polynôme minimal d'un endomorphisme.Montrer que ses racines sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme..

Point 139 : Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Montrer que les valeurs propres d'un sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

Point 140 : Définition d'un endomorphisme diagonalisable.(Donner deux définitions)

Point 141 : Conditions nécessaires pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 142 : Conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 143 : Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Point 144 : Conditions nécessaires pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 145 : Conditions suffisantes pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 146 : Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.

Point 147 : Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.(Trois démonstrations possibles)

Point 148 : Définition d'une matrice diagonalisable, d'une matrice trigonalisable (En termes de similitude).

Point 149 : Définition des éléments propres d'une matrice, de son polynôme caractéristique, de son polynôme minimal.

Point 150 : Définition d'une fonction convexe. Caractérisation pour une fonction dérivable, pour une fonction deux fois dérivable.

Point 151 : Inégalité de Jensen pour une fonction dérivable. Démonstration.

Point 152 : Caractérisation des fermés dans un espace vectoriel normé.

Point 153 : Théorème de structure pour les éléments de $O(n)$.

Point 154 : Décomposition $d + n$ d'un endomorphisme et interprétation matricielle (seulement l'existence).

Point 155 : Dans un espace euclidien, définition de l'isomorphisme canonique entre l'espace et son dual. Prouver qu'il s'agit bien d'un isomorphisme.

Point 156 : Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien.(deux propriétés équivalentes)

Point 157 : Etant donné une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ comment montrez vous qu'il s'agit de la matrice d'une rotation et comment trouvez-vous ses éléments caractéristiques ?

Point 158 : Enoncer le théorème spectral, pour les endomorphismes et pour les matrices.

Point 159 : Démontrer le théorème spectral pour les endomorphismes.

Point 160 : Enoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Point 161 : Exposer la méthode de la variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Point 162 : Résoudre l'équation à coefficients constants $y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$, en discutant suivant les différentes configurations des paramètres (P est un polynôme).

Point 163 : Enoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

Point 164 : Définition de l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie.

Point 165 : Exponentielle de la somme de deux endomorphismes.

Point 166 : Adaptation de la méthode de la variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Point 167 : Définition du wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.

Point 168 : Définir la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables définie sur un ouver. Définir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Point 169 : Définir la matrice jacobienne d'une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.

Point 170 : Donner la formule permettant de calculer la dérivée partielle d'une fonction composée.

Point 171 : Définition d'un extremum local. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction différentiable.

Point 172 : Tangente à une courbe .

Point 173 : Normale à une courbe plane.

Point 174 : Définition d'une tribu et d'un espace probabilisable.

Point 175 : Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable.

Point 176 : Enoncé du théorème de continuité croissante pour une probabilité. Application à la probabilité d'une réunion.

Point 177 : Enoncé du théorème de continuité décroissante.

Point 178 : Probabilité conditionnelle

Point 179 : Formule des probabilités composées.

Point 180 : Formule des probabilités totales.

Point 181 : Définition de l'indépendance d'une famille d'évènements.

Point 182 : Définition d'une variable aléatoire discrète.

Point 183 : Loi d'une variable aléatoire.

Point 184 : Loi conjointe, loi marginale d'un couple de variables aléatoires

Point 185 : Indépendance d'une famille de variables aléatoires.

Point 186 : Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables aléatoires indépendantes.

Point 187 : G Loi géométrique de paramètre p dans $]0,1[$. Espérance, variance et fonction génératrice.

Point 188 : Loi de Poisson de paramètre λ. Espérance, variance et fonction génératrice.

Point 189 : Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire.

Point 190 : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

Point 191 : Définition de l'espérance d'une variable aléatoire (avec le cas particulier des variables aléatoires positives).

Point 192 : Propriétés de base de l'espérance.

Point 193 : Formule de transfert.

Point 194 : Inégalité de Markov.

Point 195 : Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Point 196 : Variance d'une variable aléatoire. Ecart-type.

Point 197 : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un couple de variables aléatoires.

Point 198 : Covariance de deux variables aléatoires réelles.

Point 199 : Variance d'une somme finie de variables aléatoires réelles.

Point 200 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Point 201 : Loi faible des grands nombres.

Point 202 : Définition de la fonction génératrice. Premières propriétés.

Point 203 : Utilisation de la fonction génératrice pour la détermination de l'espérance et de la variance.

Point 204 : Fonction génératrice de la somme de variables indépendantes.