EXERCICES CLASSIQUES

Ces exercices, illustrant des méthodes dont la maîtrise est impérative, sont rangés dans l'ordre de leur apparition dans le cours.

Exercice 1: Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède au plus une solution x_n strictement positive.

Exercice 2: La fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0,1]$ il existe c dans $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Exercice 4: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution du problème différentiel :

$$y'' + y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$$

si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout x :

$$f(x) = a + bx + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Exercice 5: Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont ds réels positifs alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 6: Prouver

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 7: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 8: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 9: Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 10: Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 11: Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout i $m_{i,i} > \sum_{j \neq i} m_{i,j}$ alors elle est inversible.

Exercice 12: Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 13: Montrer que dans un espace vectoriel normé tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Exercice 14: *Le lemme de Cesàro*
Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 15: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 16: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Exercice 17: Nature de la série de terme général $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2n)^n}$.

Exercice 18: Nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 19: Nature, suivant la valeur du paramètre réel strictement positif α, de la série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 20: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Exercice 21: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 22: Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(\sqrt{n})(\ln n)^2}$.

Exercice 23: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Exercice 24: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 25: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{n!(2n)!}a^n$ $(a>0)$.

Exercice 26: Nature de la série de terme général $\ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$.

Exercice 27: On pose, pour $n\geq 1$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Etudier la suite (I_n) (monotonie,limite).
3) Etudier la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}I_n$.
4) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
5) En déduire l'expression de I_n.
6) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} I_n$.

Exercice 28: Soit

$$\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 29: Soit

$$\alpha_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\operatorname{argsh} n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente.
2) On note α sa limite. Donner un équivalent de $\alpha_n-\alpha$, en supposant qu'on possède un équivalent de $\alpha_n-\alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$, $\beta>1$.
3) Déterminer un équivalent de $\alpha_n-\alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$.

Exercice 30: Soit
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 31: Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ en utilisant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.