EXERCICES CLASSIQUES

Ces exercices, illustrant des méthodes dont la maîtrise est impérative, sont rangés dans l'ordre de leur apparition dans le cours.

Exercice 1: Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède au plus une solution x_n strictement positive.

Exercice 2: La fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0,1]$ il existe c dans $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Exercice 4: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution du problème différentiel :

$$y'' + y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$$

si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout x :

$$f(x) = a + bx - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Exercice 5: Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont ds réels positifs alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 6: Prouver

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 7: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 8: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 9:
1) Rappeler la définition de $O_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 10: Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 11: Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout i $m_{i,i} > \sum_{j\neq i} m_{i,j}$ alors elle est inversible.

Exercice 12: Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 13: Montrer que dans un espace vectoriel normé tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Exercice 14: *Le lemme de Cesàro*
Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 15: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 16: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Exercice 17: Nature de la série de terme général $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2n)^n}$.

Exercice 18: Nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 19: Nature, suivant la valeur du paramètre réel strictement positif α, de la série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 20: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Exercice 21: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 22: Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(\sqrt{n})(\ln n)^2}$.

Exercice 23: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Exercice 24: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 25: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{n!(2n)!}a^n \ (a>0)$.

Exercice 26: Nature de la série de terme général $\ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$.

Exercice 27: On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Etudier la suite (I_n) (monotonie,limite).
3) Etudier la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}I_n$.
4) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
5) En déduire l'expression de I_n.
6) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} I_n$.

Exercice 28: Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 29: Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \operatorname{argsh} n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente.
2) On note α sa limite. Donner un équivalent de $\alpha_n - \alpha$, en supposant qu'on possède un équivalent de $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$, $\beta > 1$.
3) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$.

Exercice 30: Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 31: Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, c'est-à-dire l'existence de $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx$ en utilisant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. On considère que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongée par continuité en 0.

Exercice 32: On considère

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f possède en $+\infty$ un équivalent de la forme At^α.

Exercice 33: Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 34: On définit f par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 35: On définit f par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 36: On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que cette suite converge et préciser cette limite.
2) Si ℓ est sa limite, donner un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37: En comparant avec une intégrale trouver un équivalent de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 38:
1) Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$, définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.

Exercice 39: En utilisant la formule du binôme et en faisant apparaître une série de fonctions montrer que pour tout nombre complexe z :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Exercice 40: Enoncer et démontrer le théorème de permutation des limites.

Exercice 41:
1) Enoncer le théorème de Weierstrass sur l'approximation par les polynômes des fonctions.
2) Démontrer ce théorème pour une fonction f continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{C}$.

Exercice 42: Prouver que pour tout couple (z, z') de nombres complexes : $\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')$.

Exercice 43:
1) Donner développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, où α est un nombre réel non entier. On précisera son rayon de convergence.
2) Démontrer le résultat établi à la question précédente.

Exercice 44: On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n+1}.$$

1) Rayon de convergence ?
2) Plus grand intervalle sur lequel on a la convergence simple ?
3) Etudier la convergence normale et uniforme sur $[0,1[$ et $[-1,0]$.

Exercice 45: Soit t un réel.
1) Développer en série entière :

$$f : x \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos t + 1).$$

Exercice 46: Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Exercice 47: Soit $f(z)$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0, r[$.
1) Calculer, si n est un entier

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

2) Calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt.$$

Exercice 48: Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 49:
1) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \sin(\lambda t)\, f(t)\,dt = 0$
2) Le résultat reste vrai si f est une fonction en escalier.
3) Le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.
4) Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ intégrable. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} \sin \lambda t\, f(t)\,dt = 0.$$

Indication : Introduire la suite de fonction $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec

$$F_p(\lambda) = \int_{-p}^{p} \sin\lambda t\, f(t)\,dt$$

Exercice 50: Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 51:
1) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)\,f(t)\,dt = 0$
2) Le résultat reste vrai si f est une fonction en escalier.
3) Le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.
4) Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ intégrable. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\infty}^{+\infty}\sin\lambda t\,f(t)\,dt = 0.$$

Indication : Introduire la suite de fonction $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec

$$F_p(\lambda) = \int_{-p}^{p}\sin\lambda t\,f(t)\,dt$$

Exercice 52: Déterminer sous la forme d'une intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \sin x\,dx.$$

Exercice 53: Soit α un réel strictement positif. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}.$$

Exercice 54: Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

en n'utilisant que le programme de première année.

Exercice 55: Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée pour permuter intégration et sommation.

Exercice 56: Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n\ln(1+u^n)\,du.$$

Exercice 57: Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos x\,dx.$$

Ne pas laisser le résultat sous la forme d'une intégrale.

Exercice 58: Comparer

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt \text{ à } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 59: On pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+\cdots+x^n}dx.$$

Etudier la suite (u_n) .

Exercice 60: Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nt^n f(t)\,dt.$$

Exercice 61: On voudrait prouver :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

1) Prouver ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée.
2) Prouver ce résultat en intégrant directement la somme partielle d'une suite géométrique.
3) (subsidiaire) Calculer la valeur de la somme.
Indication : On pourra utiliser $1+X^4 = (1+\sqrt{2}X+x^2)(1-\sqrt{2}X+X^2)$ et effectuer une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 62:
1) Donner une condition nécessaire sur le nombre complexe s pour que la fonction $t \mapsto te^{-st}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$, donner alors la valeur de son intégrale sur cet intervalle.
2) Ecrire, sur un domaine de valeurs de x qu'on précisera, la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t\cos xt}{e^t+1} dt$$

comme la somme d'une série de fonctions, en utilisant le théorème classique de permutation de l'intégration et de la sommation.

Exercice 63:
1) Majorer $\left|\frac{\ln(x^2+t^2)|}{1+t^2}\right|$ par une fonction de t indépendante de x, sachant que x est dans l'intervalle $[-a,a]$. Cette fonction est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$?
Indication : On commencera par encadrer $\ln(x^2+t^2)$, en utilisant la croissance du logarithme.
2) Majorer simplement $\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right|$ par une fonction de t sachant que x est dans l'intervalle $[a,b]$. Existe-t-il une majoration si x est dans l'intervalle $[a,+\infty[$, une majoration si x est un réel quelconque en restreignant t à $\mathbb{R}^{*+}$?

Exercice 64:
1) Majorer $\left|\ln(1-2x\cos t+x^2)\right|$ par une fonction de t indépendante de x, définie sur $]0,\pi[$, sachant que x est dans l'intervalle $[0,a]$, $a>1$. Cette fonction est-elle intégrable ?
2) Reprendre la question si x est dans $[-a,a]$, $a>1$.

Exercice 65: On suppose f continue à valeurs complexes et $t \mapsto tf(t)$ intégrable. Etudier la continuité et la dérivabilité de

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt.$$

Exercice 66: Calculer

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Exercice 67: Soit f une fonction continue et bornée sue $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$L(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 68: On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

1) Donner le domaine de définition de f. Prouver que f est continue sur cette intervalle.
2) Donner le plus grand intervalle sur lequel g est définie. Montrer que g est continue sur cet intervalle.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
4) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
5) Montrer que f et g sont solutions sur $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \frac{1}{x}$.
6) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 69: Ecrire sous la forme d'une série
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$$

Exercice 70:
$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})} dt.$$

1) Domaine de définition de f.
2) Continuité de f.
3) Dérivabilité de f.
4) Calcul de f à l'aide d'une équation différentielle.
Indication : Un changement de variable plutôt simple permet d'obtenir une relation entre $f'(x)$, $f(x)$ et x.

Exercice 71: Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt.$
Indication : Montrer que I est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 72: Soit
$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt.$$

1) Etudier la continuité de f
2) Etudier la dérivabilité de f.
3) Calculer f.

Exercice 73: On veut calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt.$
1) Montrer que I est dérivable.
2) Montrer que I et solution d'une équation différentielle simple.
3) En déduire la valeur de $I(x)$.

Exercice 74:
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + xt)}{t(1 + t^2)}\, dt.$$

1) Domaine de définition ?
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3) Calculer $f'(x)$.
4) En déduire $f(x)$.(Le résultat contient ue primitive qu'il faut laisser sous la forme d'une intégrale. En fixer une borne et déterminer la constante adéquate.)

Exercice 75: Déterminer le nombre d'éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{78\mathbb{Z}}$. Justifier la caractérisation employée.

Exercice 76: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ inversible dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que son inverse est dans $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement $\det A = \pm 1$.

Exercice 77: Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, u un endomorphisme de E. On suppose que pour tout x de E il existe λ tel que $u(x) = \lambda.x$. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 78: Déterminer toutes les matrices qui commutent avec une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts.

Exercice 79: Déterminer toutes les matrices qui commutent avec
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Exercice 80: Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire
$$Z(M_n(\mathbb{K})) = \{M \in M_n(\mathbb{K}); \forall N \in M_n(\mathbb{K})\ MN = NM\}.$$