Convexité

Exercice 1: Soit $(x_1,\dots,x_n)$ des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 2:
1) Soit $(x_1,\dots,x_n)$, $n \geq 1$ une famille finie de réels positifs. Montrer que

$$1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}.$$

Indication : Considérer $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$.
2) (Pour les 5/2) Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer que

$$1+\sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.$$

Exercice 3: Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée est constante.

Exercice 4: Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe. Montrer que tout minimum local (note [1]) de f est un minimum global.

Exercice 5: Soit f une fonction à valeur réelle, définie et continue sur l'intervalle I (non réduit à un point), dérivable sur $J = I\backslash E$ où E est un ensemble fini. Montrer que si f' est croissante sur J alors f est convexe.

Exercice 6:
1) Soit f et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(f,g)$ est convexe. Peux-on en dire autant de $\inf(f,g)$.
2) Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions convexes définies sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction g (quelconque) telle que $f_\lambda \leq g$ pour tout λ de Λ. Montrer que $\sup_{\lambda\in\Lambda}$ est une fonction convexe.
3) En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque positive alors il existe une fonction convexe g telle $g \leq f$ et pour toute fonction convexe h : $h \leq f \Rightarrow h \leq g$.

Exercice 7:
1) Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel réel E. Montrer que l'intersection de toutes les parties convexes contenant A est une partie convexe et que c'est la plus petite partie convexe de E contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A et on la note $\mathrm{Conv}(A)$.
2) Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des familles pondérés de points de A.

1. On dit que f admet un minimum local en a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout x de $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ on ait $f(x) \geq f(a)$