Espaces vectoriels normés (I)

Exercice 1: Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
1) Soit x un point de Ω. Montrer qu'il existe un plus grand intervalle contenant x et contenu dans Ω. Prouver que c'est un intervalle ouvert.
2) En déduire que Ω est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 2: Montrer que toute boule ouverte ou fermée est convexe.

Exercice 3: Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \|PAP^{-1}\| = \|A\|.$$

Indication : Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 4: Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_2(0, r) \subset B_1(0, 1)$, où B_i désigne la boule ouverte pour la norme N_i.

Exercice 5:
1) Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
2) Dans un espace vectoriel normé un hyperplan est fermé ou dense.

Exercice 6: *Le lemme de Cesàro* Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 7: Soit E un e.v.n. et T l'application de E vers E telle que $T(u) = u$ si $\|u\| \leq 1$ et $T(u) = \frac{1}{\|u\|}u$ sinon. Montrer que T est 2-lipschitzienne.

Exercice 8: Soit $f : E \to F$ continue et A une partie de E. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

Exercice 9: Soient f et g deux applications continues de E vers $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $A = \{x; f(x) = g(x)\}$ est fermé et que l'ensemble $B = \{x; f(x) < g(x)\}$ est ouvert.

Exercice 10: Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Si f appartient à E, on définit $k(f)$ comme le plus petit réel positif tel que

$$\forall (t, t') \in [0, 1]^2 \quad |f(t) - f(t')| \leq k|t - t'|$$

1) Est-ce que l'application $f \mapsto k(f)$ est une norme sur E ?
2) Montrer que $f \mapsto |f(0)| + k(f)$ est une norme sur E.
3) On pose $N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $N_2(f) = N_1(f) + k(f)$. Expliquer rapidement pourquoi N_1 et N_2 sont des normes. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 11: Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 12:
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrons qu'on peut en extraire une suite croissante ou une suite décroissante.
Indication : Introduire l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N}; \forall m \geq n \ u_m \geq u_n\}$$

et distinguer les cas où il est fini ou infini.
2) En déduire que si elle est bornée on peut en extraire une suite convergente.