Espaces vectoriels normés (II)

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert dense de E, et B une partie dense dans E. Montrer que $A \cap B$ est dense.

Exercice 2: E est un espace vectoriel normé réel.
1) Montrer que la boule ouverte de rayon 1, d'origine O, d'un espace vectoriel normé réel est une partie convexe bornée et symétrique par rapport à O. On la note B.
2) Soit x un élément non nul de E, montrer que $\sup\{\alpha; \alpha x \in B\}$ existe. Quel est son lien avec $\|x\|$?

Exercice 3: Si A est une partie d'un e.v.n. E on désigne par $f(A)$ l'intérieur de l'adhérence de A. Prouver que si U et V sont deux ouverts disjoints il en est de même de $f(U)$ et $f(V)$.

Exercice 4: Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, d'intérieur non vide est égal à E.

Exercice 5: Soit f une application définie sur un espace vectoriel normé E et A une partie de E.
1) Montrer que si f est continue en chaque point de A alors la restriction de f à A est continue.
2) Montrer, par un contre-exemple que la réciproque est fausse en général.
3) Montrer que la réciproque est vraie si l'on suppose que A est un ouvert.

Exercice 6: Soit f une application uniformément continue de E vers F, espaces vectoriels normés. Montrer qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq A\|x\| + B.$$

Exercice 7: Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 8: Soit n un entier non nul, A et P deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que (A^k) tende vers P. Montrer que $AP = PA$ et $P^2 = P$.

Exercice 9: On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme usuelle $\|x\| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue admettant une limite lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Prouvez que f est uniformément continue.

Exercice 10: On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\sum a_n X^n\| = \sup |a_n|$.
1) L'application $f : P \mapsto P(1)$ est-elle continue ?
2) Montrer que le sous-espace $F = \text{Ker } f$ est dense dans E.

Exercice 11: Soit E un espace vectoriel normé. $F = \text{Ker } u$ où u est une forme linéaire. Montrer que F est fermé si et seulement si u est continue.

Exercice 12: Soit E l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$. On considère le sous-espace F des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0.$$

1) Montrer que tout élément f de F possède une unique primitive $T(f)$ dans F.
2) Montrer que T est une application linéaire continue de F vers F.

Exercice 13: Soient E et F deux espaces vectoriels normés et u une application linéaire de E vers F. Montrer que si l'image par u de toute suite tendant vers zéro est une suite bornée alors u est continue.

Exercice 14: Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que l'image de tout ouvert soit un ouvert.

Exercice 15: Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé. Montrer que ce sous-espace est fermé. En déduire que si x est un élément de E qui n'est pas dans F alors $d(x, F) > 0$.

Exercice 16:
1) Montrer que si A est une partie d'un espace vectoriel norméE l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
2) Montrer que pour tout x de E

$$d(x, A) = d(x, A \cap B'(x, d(x, A) + 1)).$$

3) En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie il existe pour tout x de E un y tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.

Exercice 17: On munit l'espace E des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Exercice 18: Dans un e.v.n. E dont A et B sont deux parties. Si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert. Si A est compact et si B est fermé $A + B$ est fermé. Si A et B sont compacts $A + B$ est compact.

Exercice 19: Justifier (topologiquement) l'existence d'un cercle de plus grand rayon contenu dans un triangle. Montrer qu'il s'agit du cercle inscrit.

Exercice 20: Justifier l'existence dans l'espace d'un point qui minimise la somme des distances d'un point à n points fixés.

Exercice 21: Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et f une application de K dans K telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.