Séries numériques

Exercice 1: Etudier la convergence des séries dont le terme général est

$$\sqrt[3]{n^3+2n+1}-n,\quad \arctan\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\arctan\sqrt{1-\frac{1}{n}},\quad ne^{-n},\quad e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 2: Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1)-\ln n$ et de $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)$, en déduire la nature des séries de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n\ln n}$.

Exercice 3:
1) Donner une valeur de n telle que

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>10.$$

2) Ecrire un programme en Python et/ou dans le langage de votre calculatrice permettant de trouver le plus petit entier n tel que :

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>4.$$

Exercice 4:
1) Donner un exemple d'une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}u_n$ convergente et telle que l'on a pas $(u_n)=\circ(\frac{1}{n})$.
2) On suppose (u_n) positive et décroissante. Montrer que si $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge alors $(u_n)=\circ(\frac{1}{n})$.

Exercice 5: Nature de la série de terme général : $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n}$.

Exercice 6: Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{1}{1+2^{1/2}+\cdots+n^{1/n}}$.

Exercice 7: Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 8: Nature de la série de terme général $u_n=\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 9: Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k$.

Exercice 10:
1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. On pose $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$
2) Justifier l'écriture $\mathbb{R}_{2n-1}=\displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)$
3) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2p}}-\dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2p}}-\dfrac{1}{\sqrt{2p+2}}\right)$
Indication : On passera par l'intermédiaire de développements asymptotiques.
4) En déduire la partie principale de R_{2n-1}, puis celle de R_{2n} et finalement un équivalent de R_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 11: On définit (u_n) par $u_{n+1}=1-\cos(u_n)$. Nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 12: $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. On pose $r_n=\displaystyle\sum_{p=n}^{\infty}u_p$. Etudier la série de terme général $\dfrac{u_n}{r_n^{\alpha}}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$.

Exercice 13: On considère la suite déterminée par la relation de récurrence $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$. Etude, limite, équivalent.

Exercice 14: Soit u_n une suite décroissante de limite nulle. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que $u_{n_k}\geq\dfrac{1}{n_k}$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 15:
1) Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs divergente. On note S_n la somme d'ordre n. En considérant la série de terme général $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}$ établir qu'il existe une suite positive (α_n) tendant vers 0 telle que $\sum \alpha_n u_n$ diverge.
2) Montrer de même que si $\sum u_n$ converge, il existe une suite positive (α_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\sum \alpha_n u_n$ converge.

Exercice 16: Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + v_n$ où la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente. Montrer qu'il existe c réel strictement positif tel que $(u_n) \sim (\frac{c}{n^\alpha})$.

Exercice 17: Equivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^{\frac{1}{k}} - 1)$.

Exercice 18: On considère une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ telle que pour n assez grand

$$\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{n^\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

Montrer que cette série est convergente.

Exercice 19: Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Montrer qu'elle est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$, où

$$v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} + \cdots + u_{2n}).$$

Exercice 20: Nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 21:
1) Etudier la suite u_n telle que $u_1 = 1,$ et $u_{n+1} = u_n \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
2) Nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^\alpha$.

Exercice 22: Nature de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2}$.

Exercice 23: Nature des séries de termes généraux :

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{cn^\alpha} \quad (c \geq 0, \alpha \geq 0), \qquad \frac{\ln(1+n^\beta x^n)}{n^\alpha} \quad (x > 0).$$

Exercice 24: Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\ \ln(n+2)}\right)$. Calculer sa somme.

Exercice 25: (u_n) est une suite de réels strictement positifs. Comparer les natures $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 26: Soit $\sum x_n$ une série divergente à termes strictement positifs. Que dire des séries

$$\sum \frac{x_n}{1+x_n} \quad \sum \frac{x_n}{1+x_n^2} \quad \sum \frac{x_n}{1+nx_n} \quad \sum \frac{x_n}{1+n^2x_n} \quad ?$$

Exercice 27: Une suite (u_n) est donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b}u_n$ avec $0 < a < b$. Existe-t-il un α tel que $(n^\alpha u_n)$ ait une limite non nulle ? Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 28: On se donne une série divergente $\sum_{n\geq 1} u_n$, à termes strictement positifs. On définit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ et $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

Exercice 29: Déterminer la nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{\ln n}}$.