Dénombrabilité – Familles sommables

Exercice 1: Montrer que $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2: Un élément α est algébrique s'il existe un polynôme P, non nul, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(\alpha)=0$. En introduisant, pour n entier non nul l'ensemble

$$E_n=\{\alpha\in\mathbb{C};\exists P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{Z}[X]-\{0\},\ \forall k\in[0,n]\ |a_k|\le n, P(\alpha)=0\}$$

montrer que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques est dénombrable. En déduire qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas algébriques. De tels nombres sont dits transcendants.

Exercice 3: Soit $\sum_{n\ge 0}a_n$ une série de réels positifs. En introduisant la suite double $(x_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $x_{n,p}=a_n$ si $p<n$, $x_{n,p}=0$ montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}na_n=\sum_{n=0}^{+\infty}R_n,$$

dès que l'une des sommes est définie, où $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$ lorsque cette somme est définie.

Exercice 4:

1) Etudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2-\{(0,0)\}}$.

2) Montrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2, à expliciter, strictement positives et telles que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2\quad c_1(p+q)\le\sqrt{p^2+q^2}\le c_2(p+q).$$

3) En déduire la sommabilité, suivant les valeur de α, de $\left(\dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2}^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2-\{(0,0)\}}$.

Exercice 5: On considère la série $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$. Que dire de la convergence de la série ? Que dire de la convergence du produit de Cauchy de cette série par elle-même ?

Exercice 6:

1) Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$ on a $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$.

2) En utilisant un produit de Cauchy en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}nz^n$, si $|z|<1$.

3) En déduire, si $|z|<1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nz^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{(1-z^n)^2}$.

Exercice 7: Montrer que pour t dans $]-1,1[$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{1-t^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)t^n$, où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Exercice 8: Montrer que pour t dans $]-1,1[$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Exercice 9: Montrer qu'il existe une suite a_n de nombres réels tels que :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer ces coefficients à l'aide de la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 10: Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$.

Exercice 11:
1) Montrer qu'il existe une famille dénombrable de parties infinies de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes.
2) Existe-t-il une famille non-dénombrable de parties infinies de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes.
3) Existe-t-il une famille non-dénombrable de parties infinies de $\mathbb{N}$, dont les intersections deux à deux sont finies.