Suites et séries de fonctions.

Exercice 1: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exercice 2: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx - \frac{1}{n} \text{ si } x \in [0,\frac{1}{n}],\ f_n(x) = 1-x \text{ si } x \in [\frac{1}{n},1]$$

Exercice 3: Etudier les séries de fonctions suivantes en précisant les domaines de convergence simple, normale, uniforme. Dans un deuxième temps étudier la continuité et la dérivabilité de la somme de la série.

1. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.
2. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.
3. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = nxe^{-nx}\sin x$.
4. $\mathbb{R}^{*+}$, $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$. Déterminer les limites de la somme aux bornes de l'intervalle de convergence. Chercher ensuite des équivalents de la somme aux bornes de cet intervalle.
5. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$.
6. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$.
7. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$.
8. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$.
9. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Déterminer la limite de la somme en $+\infty$, puis un équivalent de cette somme, puis son développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 4: Soit P_n une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g. Montrer que g est polynomiale et que pour n assez grand f_n et g ne diffèrent que d'une constante ($f_n - g$ est une fonction constante).

Exercice 5: Etudier la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$.

Exercice 6:
1) Montrer que le produit de Cauchy de deux séries de fonctions qui convergent normalement converge normalement.
2) En est-il de même si on suppose seulement que les séries convergent uniformément ?
Indication : Considérer $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}x^n}$ sur $[0,1]$.

Exercice 7: *Théorème de Dini*
Si une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles est croissante et converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

Exercice 8: *Deuxième théorème de Dini*
Si une suite de fonctions croissantes sur $[a,b]$ à valeurs réelles converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.