Séries entières

Exercice 1: La question à laquelle il faut savoir répondre! Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.
Calculer pour $r > 0$, et n entier, la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

Exercice 2: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On suppose que $(a_n) \sim (b_n)$. Montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

Exercice 3: Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

1) Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n z^n$?

2) Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$? Et si de plus $a_n b_n = 0$ pour tout n ?

Exercice 4: Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients non nuls, p un entier non nul fixé. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = l$$

existe. Que dire du rayon de convergence de la série entière ?

Exercice 5: Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!} z^n$$

et l'étudier aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 6: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ avec $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$ pour tout n. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 7: Déterminerle rayon de convergence et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1) z^n$$

Exercice 8: Déterminerle rayon de convergence et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} ((1 + \frac{1}{n})^n - e) z^n.$$

Exercice 9: Donner le développement en série entière (en précisant le rayon de convergence) de la fonction

$$\arctan \frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$$

Exercice 10:
1) Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(x)$ sur $]-R, R[$, quelle est la somme de $\sum_{n \geq 0} n a_n x^n$?
2) En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et leur domaine de validité.

Exercice 11: Si α est un réel qui n'est pas un multiple de π quels sont les rayons de convergence et les valeurs sur leurs intervalles de convergence des séries entières

$$\sum_{n \geq 0} (\cos n\alpha) x^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} (\sin n\alpha) x^n.$$

Exercice 12: On se donne un couple (a, x) de $\mathbb{R}^2$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1, u_1 = x$ et pour $n \geq 1$ $x u_n = (a - 1 + n) u_{n-1} + (n+1) u_{n+1}$.
1) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.
2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ lorsque x est dans $]-1, 1[$.

Exercice 13: Rayon de convergence et expression simple de la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

On étudiera en particulier les bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 14: On se donne deux nombres complexes α et β, β non nul. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$.
On se placera d'abord dans le cas où $r^2 - \alpha r - \beta$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 que l'on ne cherchera pas à calculer car le résultat final est une fonction symétrique de r_1 et r_2. On vérifiera alors que le résultat obtenu reste vrai même si l'équation admet une racine double.

Exercice 15: Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour tout z_0 de $D(0, R)$ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$.

Exercice 16: Montrer qu'il existe une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1, telle que $f(0) = 1$ et pour tout **complexe** z de module strictement inférieur à 1 : $(f(z))^2 = (1 + z)$.

Exercice 17: Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.
On suppose que pour tout nombre complexe z, $|f(z)| \leq e^{|z|}$. Montrer que la suite $(n |a_n|^{1/n})$ est bornée.