Fonctions vectorielles

Exercice 1:
1) Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Montrer que $g : t \mapsto e^{f(t)}$ est dérivable et donner sa dérivée.
Indication : Le résultat est bien ce qu'on pense mais il n'est pas immédiat. Ecrire $f(t) = a(t) + ib(t)$ où a et b sont à valeurs réelles et utiliser la dérivabilité de exp, cos et sin sur $\mathbb{R}$.
2) Plus généralement, soit $F : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $F \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall t \in I \quad (F \circ f)'(t) = f'(t).\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(f(t))^n.$$

Indication : Utiliser le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.

Exercice 2: Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Exercice 3: Soit $A : I \to M_p(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\exp A : t \mapsto \exp A(t)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 4: *Morphismes continus de* $(\mathbb{R}, +)$ *vers* $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ On se propose de montrer que toute application continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) = f(x)f(y)$ est de la forme $f(x) = e^{ax}$ pour un a bien choisi.
1) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ F(x+y) - F(x) = f(x)F(y)$.
2) En déduire que f est de classe C^1 et vérifie l'équation différentielle $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) - f(x) = f'(x)F(y)$, puis $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f'(x+y) = f'(x)f(y)$ et finalement $f'(x) = f'(0)f(x)$.
3) Conclure.

Exercice 5:
1) Soit $f : I \to E$ une application dérivable en x_0, soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de I telles que :
— $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq x_0 \leq b_n$,
— $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq b_n$,
— $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$.

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b_n - a_n}(f(b_n) - f(a_n)) = f'(x_0).$$

On suppose maintenant f dérivable sur le segment $[a,b]$ et on se donne une fonction g dérivable sur $[a,b]$. On suppose de plus $\|f(b) - f(a)\| \geq g(b) - g(a)$.
2) On note $c = \frac{a+b}{2}$, montrer $\|f(b) - f(c)\| \geq g(b) - g(c)$ ou $\|f(c) - f(a)\| \geq g(c) - g(a)$.
3) En déduire l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) et d'un x_0 vérifiant les hypothèses de la première question et telles que de plus, pour tout n : $\|f(b_n) - f(a_n)\| \geq g(b_n) - g(a_n)$.
4) En déduire l'existence d'un x_0 tel que $\|f'(x_0)\| \geq g'(x_0)$.
5) En remplaçant g par $g_\epsilon : x \mapsto g(x) + \epsilon x$, pour un ϵ bien choisi, montrer que si $\|f(b) - f(a)\| > g(b) - g(a)$, il existe x_0 tel que $\|f'(x_0)\| > g'(x_0)$. En déduire l'inégalité des accroissements finis :
Si $f : I \to E$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux applications dérivables sur $[a,b]$ et si $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ pour tout t de $[a,b]$ alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Exercice 6: *CCS 2016 (Python)* Soit Γ l'arc paramétré par

$$f(t) = (x(t) = (1 + \cos(t))\cos(t), y(t) = (1 + \cos(t))\sin(t), z(t) = 4\sin(\frac{t}{2})).$$

1) Déterminer les points réguliers de Γ et le vecteur tangent unitaire en ces points.
2) Vérifier que ce vecteur tangent forme un angle constant avec l'axe Oz.
3) Calculer la longueur de cet arc, c'est-à-dire le nombre $L = \int_0^{4\pi} \|f'(t)\|\,dt$.
4) A l'aide du logiciel, représenter les projections de Γ sur les trois plans de coordonnées.