Intégration

Exercice 1: Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs complexes telles que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \arctan(\sqrt{1-x^2})\,dx \qquad \int_{-2}^0 \frac{\sqrt{-x(x+4)}}{x}\,dx.$$

Exercice 3: Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$.

Exercice 4: Nature de $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Exercice 5: Nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+\cos \pi t}\,dt \quad ?$$

Exercice 6:
Discuter l'existence de $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{|\ln x|^{\alpha}}{(1-x)^{\beta}}\,dx$.

Exercice 7: Existence de l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{|\ln|1-x||^{\alpha}}{x^2}\,dx$.

Exercice 8: Convergence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt\ .$$

Indication : On pourra commencer par justifier l'intégrabilité puis faire le changement de variable $t = \sin\theta$.

Exercice 9: Existence et calcul de :

$$I = \int_{]-1,1[} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 10: Soient a et b deux réels, $0 < a < b$. Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{\mathbb{R}^{*+}} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$$

Exercice 11: Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de :

$$f(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}dt.$$

Exercice 12:
On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

1) Existence ?
2) Comparer I et J.
3) Calculer I et J, en considérant $I + J$.

Exercice 13: Etudier l'existence de $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} e^{-x|\sin x|} \, dx$.

Exercice 14:
Soit $f \in C([0, \infty[, \mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{x+t} \, dt$ converge pour tout $x > 0$.

Exercice 15:
1) Que dire de l'intégrabilité de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $[0, 1[$.
2) Etudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

Exercice 16: Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t) \, dt$ converge. On définit g par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$$

si x est non nul.
1) Etudier la prolongeabilité de g à $\mathbb{R}^+$. Calculer la dérivée de g.
2) Soit (a, b) avec $0 < a < b$
   a) Prouver que

$$\int_a^b g^2(t) \, dt = a g^2(a) - b g^2(b) + 2 \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$

   b) En déduire

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t) \, dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) \, dt} + \sqrt{a g^2(a) + \int_0^{\infty} f^2(t) \, dt}$$

   c) Conclure quand à la convergence de $\int_0^{+\infty} g^2(t) \, dt$ et prouver l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) \, dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) \, dt.$$

Exercice 17: Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, non nulle en au moins un point où elle est continue. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t) \, dt$.
1) Montrer que pour n plus grand que 2 : $I_n I_{n-2} \geq I_{n-1}^2$.
2) En déduire que la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite non nulle.
3) En déduire que la suite $(I_n^{1/n})$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Indication : Se ramener au théorème de sommation des équivalents.
4) Déterminer cette limite lorsque f est continue.