Intégration sur un intervalle quelconque (II)

Exercice 1:
1) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de la fonction :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

2) Mêmes questions avec :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2} dt.$$

Exercice 2: Etablir

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ et } \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Exercice 3: Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx.$$

Exercice 4: Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 5: Ecrire

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx$$

sous la forme d'une série.

Exercice 6:
1) Domaine de définition de

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t)\, dt?$$

2) Domaine de continuité ?
3) Domaine de dérivabilité ?
4) Calculer I' et en déduire I.

Exercice 7: On pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2 \ , \ g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt \quad .$$

1) Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer f' et g', qu'en déduisez vous ?
3) Calculer $\lim_{x\to\infty} g(x)$. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Exercice 8: Etudier la fonction définie par

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

(domaine de définition, continuité, dérivabilité, équation différentielle associée, calcul.)

Exercice 9: Soit f une fonction bornée et continue sur $\mathbb{R}^+$. Prouver : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt = f(0)$.

Exercice 10:
1) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que la fonction g telle que $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$, est de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors g est de classe $\mathcal{C}^k$.
Indication : On pourra écrire g sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre, ou établir que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$g^{(k)}(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

Exercice 11: Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+a) - f(x-a)|\, dx.$$

Exercice 12: Soit f continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1[$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n (1-t) f(t)\, dt.$$

Exercice 13:
1) Déterminer $l = \lim_{n \to +\infty} I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$.
2) Donner un équivalent de $I_n - l$.
Indication : On se ramènera à une intégrale sur $]0, 1]$ en effectuant un changement de variable dans $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$. On développera la fonction à intégrer en série de fonctions, on permutera intégration et sommation. On cherchera finalement un équivalent de la série de fonctions de n obtenue.

Exercice 14: On voudrait calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx\ .$$

1) Justifier la convergence de cette intégrale.
2) Prouver que I vaut aussi :

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} dx\ .$$

Pour a réel on pose :

$$F(a) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx\ .$$

3) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
5) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6) Calculer la dérivée de F.
7) Calculer F.
8) En déduire la valeur de I.

Exercice 15: *Equivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre*
On considère la fonction définie par $J(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + a^2}} dx$. Etudier le domaine de définition de J, sa limite quand a tend vers 0, et finalement un équivalent de $J(a)$ quand a tend vers 0. En déduire un équivalent de $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + a^2}} dx$.