Groupes-Congruences

Exercice 1: Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. A tout x de G on associe l'application
$$\phi_x : g \mapsto xgx^{-1}.$$
Montrer que ϕ_x est un automorphisme de G et que l'application $\phi : x \mapsto \phi_x$ est un morphisme de groupes. Est-il injectif ?

Exercice 2: Si G est un groupe l'ensemble
$$Z(G) = \{x \in G, \forall y \; xy = yx\}$$
s'appelle le centre de G.
1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2) Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{R})$?
Indication : On pourra considéré les matrice $I_n + R_{i,j}$.

Exercice 3: Quels sont les morphismes de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. On pourra admettre que les transpositions engendrent S_n. On prouvera que deux transpositions sont conjuguées : si τ_1 et τ_2 sont des transpositions il existe une permutation σ telle que $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$.

Exercice 4: Si ϕ est l'indicatrice d'Euler, que vaut
$$\sum_{d|n} \phi(d)?$$

Exercice 5: Soit G un groupe fini de cardinal n. Soit S une partie de G non vide. Pour k dans $\mathbb{N}^*$ on pose $A(k) = \{s_1 ... s_k ; (s_1, \dots, s_k) \in S^k\}$ et $a_k = |A(k)|$.
1) Montrer que la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est croissante.
2) Montrer que pour tout $k \geq n$, $a_{k+1} = a_k$.
3) Montrer que $A(n)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose pour $h \in \mathbb{R}$
$$M_h = \begin{pmatrix} a^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que $G_a = \{M_h, h \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7: Soit G un groupe fini dans lequel tout élément est d'ordre 1 ou 2. Montrer que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 8: On considère le groupe additif
$$G = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}.$$
Trouver une condition (p, q) pour que ce groupe soit cyclique.
Indication : Considérer l'ordre maximal d'un élément de G.

Exercice 9: Soit G un groupe commutatif fini.
1) Si x et y sont d'ordres respectifs m et n, premiers entre eux, quel est l'ordre de $x + y$?
2) On ne suppose plus m et n premiers entre eux. Montrer que pour diviseur d de n il existe un élément d'ordre d. En déduire qu'il existe un élément dans G dont l'ordre est le ppcm de m et n.
3) Il existe dans G un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres de tous les éléments de G.

Exercice 10: Si m et n sont deux entiers naturels, on note $m\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ l'ensemble des $m.\overline{x}$ où $\overline{x}$ parcourt $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Montrer qu'en tant que groupes additifs $m\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et $\frac{\mathbb{Z}}{n'\mathbb{Z}}$ sont isomorphes, où $n = n'(n \wedge m)$ ($\wedge$: pgcd).

Exercice 11: Soit G un groupe de cardinal 6. On suppose que G contient un unique élément a d'ordre 2.
1) Montrer que G contient un élément d'ordre 3.
2) Montrer que G est cyclique.