Anneaux — Polynômes

Exercice 1: Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

Exercice 2: Soit A un anneau.On pose $\forall(x,y)\in A^2 \quad [x,y]=xy-yx$.
1) Prouver l'identité de Jacobi :

$$\forall(x,y,z)\in A^3 \quad [x,[y,z]]+[z,[x,y]]+[y,[z,x]]=0.$$

2) On fixe x et l'on considère l'application D de A vers A définie par $D(y)=[x,y]$. Montrer que :

$$D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)].$$

3) On pose $D^0=\mathrm{Id}_A$ et $D^{n+1}=D^n\circ D$ pour $n\geq 0$.Etablir la formule :

$$D^n([y,z])=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,[D^k(y),D^{(n-k)}(z)].$$

Exercice 3: Soit A un anneau.
1) Un élément de A est dit nilpotent s'il existe n entier tel que $x^n=0$. Montrer que 1-x est inversible.
2) Si x et y sont nilpotents et $xy=yx$, en utilisant la formule du binôme à un ordre judicieusement choisi, montrer que $x+y$ est nilpotent.

Exercice 4: Soit A un anneau, x et y deux éléments de A tels que $xy-yx=1$. Prouver :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ x^ny-yx^n=nx^{n-1}.$$

Donner une relation similaire si $xy-yx=x$.

Exercice 5: Montrer que toute suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Exercice 6: On appelle idéal maximal d'un anneau A un idéal distinct de A et maximal pour l'inclusion par les idéaux distincts de A.
1) Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$?
On fixe maintenant $A=\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
2) Montrer que pour tout x_0 de $[a,b]$ $\mathcal{I}_{x_0}=\{f\in A, f(x_0)=0\}$ est un idéal.
3) $\mathcal{I}_{x_0}$ est-il maximal ?
4) Montrer que tout idéal maximal de A est de la forme $\mathcal{I}_{x_0}$. On pourra utiliser le résultat suivant : si $[a,b]$ est la réunion d'une famille d'intervalles ouverts (sauf à gauche en a et à droite en b) alors il est réunion d'un nombre fini d'intervalles extraits de cette famille. On montrera alors que si un idéal n'est pas de la forme $\mathcal{I}_{x_0}$, il existe un élément de cet idéal qui ne s'annule pas sur $[a,b]$, puis qu'il est égal à A.

Exercice 7: Déterminer le groupe des éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{20\mathbb{Z}}$. Trouver un groupe additif qui lui est isomorphe.

Exercice 8: *(Centrale-Supélec)* Quels sont les sous-anneaux de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

Exercice 9: *(Mines-Ponts)* Combien l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{44\mathbb{Z}}$ possède-t-il d'éléments inversibles ?