Réduction

Exercice 1: Soit A un élément donné de $M_2(\mathbb{R})$, on lui associe l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ $u : M \mapsto AM$. Valeurs et vecteurs propres de u ?

Exercice 2: Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$, $u\ : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \min(x,t)f(t)\ dt\right)$$

Déterminer valeurs et vecteurs propres de u.

Exercice 3: Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. On se donne une partie M de $L(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces F tels que $\forall u \in M\ u(F) \subset F$, sont 0 et E. Soit alors $v \in L(E)$ tel que $\forall u \in M\ uov = vou$. Prouver que v est une homothétie. (On pourra admettre que pour tout endomorphisme v de $L(E)$ il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$ avec $v(x) = \lambda x$. On introduira alors le plus grand sous-espace F tel que $\forall x \in F\ v(x) = \lambda x$.)

Exercice 4: Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Soit x dans E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre et forme une base du plus petit sous-espace stable contenant x, noté F. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans cette base ?

Exercice 5: Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$. Soit F un sous-espace stable par f. Soit G un supplémentaire quelconque de F et p le projecteur sur F parallèlement à G. Soit

$$q = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ p \circ f^{n-k}.$$

1) Montrer $q(x) = x$ si x est dans F.
2) Montrer que $q \circ f = f \circ q$.
3) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $p \circ f^k \circ p = f^k \circ p$.
4) En déduire que $p \circ q = q$ et $q \circ q = q$.
5) Déduire des questions précédentes que $F = \mathrm{Im}\ q$.
6) Déduire des questions précédentes que F admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 6: Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
1) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de uv associée au vecteur propre x, c'est aussi une valeur propre de vu. Précisez le vecteur propre associé.
2) Montrer que si 0 est valeur propre de uv alors 0 est valeur propre de vu.
3) Que déduire des deux questions précédentes ?

Exercice 7: On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1) Quel est le rang de cette matrice.
2) En résolvant le système $MX = \lambda X$ selon les valeurs de λ en déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

Exercice 8: Calculer le déterminant suivant, à coefficients réels :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 9: Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. On se donne deux endomorphismes u et v de E, montrer qu'il ont au moins un vecteur propre commun dans chacun des cas suivants :

a) $uv - vu = 0$,
b) $uv - vu = \alpha v$,
c) $uv - vu = \alpha u + \beta v$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Indication : Quelques indications pour cet exercice ultra-classique :

a) Un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe non réduit à $\{0\}$ possède au moins une valeur propre et un sous-espace propre.
b) Considérer l'endomorphise $T : L(E) \to L(E)$ avec $T(w) = uw - wu$. Montrer que si n est entier il existe α_n dans $\mathbb{C}$ tel que $T(v^n) = \alpha_n v^n$. Que dire des α_n ? de $L(E)$?. En déduire qu'il existe n tel que $v^n = 0$, puis que Ker $v \neq \{0\}$. Conclure en considérant un endomorphisme induit.
c) Se ramener au cas précédent en considérant $w = \alpha u + \beta v$.

Exercice 10: Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. On pose $u(P) = Q$ avec :

$$Q(X) = (1 + X^2)P'(X) - kXP(X).$$

1) Déterminer k pour que U soit un endomorphisme de E. On suppose k ainsi choisi.
2) Déterminer le noyau de U.
3) Valeurs propres et vecteurs propres de U.

Indication : Transformer l'équation $u(P) = \lambda P$ en une équation $\frac{P'}{P} = F$ dans $\mathbb{C}(X)$. Décomposer $P = a\prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)^{m_k}$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$. Conclure en utilisant l'unicité de la décomposition en éléments simples.

Exercice 11: Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On considère l'endomorphisme de E qui à P associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercice 12: Soit $\mathbb{K}$ un corps et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On voudrait prouver que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n).$$

1) Prouver ce résultat lorsque A est inversible.

Indication : On montrera que les deux matrices sont semblables.

2) Prouver ce résultat lorsque $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Prouver ce résultat dans le cas général.