Réduction des endomorphismes (II)

Exercice 1: Soit a dans $\mathbb{R}$ et b dans $\mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

1) A est elle diagonalisable ?(Se renseigner auprès des 5/2 pour un argument immédiat.)
2) Eléments propres de A ? Retrouver le résultat de la question précédente.
3) Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.
4) Si A est inversible calculer A^{-1}.

Exercice 2:
1) Soit f dans $L(\mathbb{C}^n)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2$.
2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ a_n & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3: Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec toute matrice commutant avec M est $\mathbb{R}[M]$.

Exercice 4: Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5: Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose $f^2 = -\mathrm{Id}_E$
1) Montrer que la dimension de E est paire.
2) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6: Calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7: Supposant $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, montrer que $B = \begin{pmatrix} 0 & -2A \\ A & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 8: Montrer pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ l'équivalence des assertions :
(i) A nilpotente ;
(ii) $\forall k, 1 \leq k \leq n, \mathrm{tr}(A^k) = 0$

Exercice 9: Soit U une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et

$$V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix}.$$

Comparer les sous-espaces propres de U et ceux de V et trouver une condition nécessaire et suffisante sur U pour que V soit diagonalisable.

Exercice 10: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que son rang est pair.

Exercice 11:
1) Montrer que ϕ, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (1 - X^2)P'(X) + nXP(X)$ est un endomorphisme.
2) Soit λ une valeur propre de ϕ et P un polynôme propre associé. Montrer que les racines de P, réelles ou complexes appartiennent à $\{-1, 1\}$.
Indication : Faire attention à la multiplicité.
3) En déduire le spectre de ϕ et les vecteurs propres associés.
4) ϕ est-il diagonalisable ?
5) Donner le polynôme caractéristique de ϕ, sa trace et son déterminant.

Exercice 12: Le corps de base est $\mathbb{C}$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 13: Soit f un endomorphisme de E, on dit que f est cyclique s'il existe un vecteur x tel que le plus petit espace vectoriel contenant x et stable par f soit E. Montrer que si le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples alors f est cyclique.

Exercice 14: Soit A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{C})$. On définit :

$$G_A = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda A \text{ est semblable à } A\}.$$

1) G_A peut-il contenir 0 ?
2) Quelle structure possède G_A ?
3) Etude de G_A pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) A quelle condition G_A est il fini ?

Exercice 15: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}.$$

1) A est-elle diagonalisable ? Sinon est-elle trigonalisable ?
2) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en précisant une matrice de passage.
3) Trouver les matrices qui commutent avec B. En déduire la forme des matrices qui commutent avec A.
4) Déterminer les sous-espaces stables par A.
Indication : Comparer un tel sous-espace à $\operatorname{Im} A$.

Exercice 16: Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de E, supposé diagonalisable. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f, et $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre engendrée par f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de la forme $P(f)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres de f et $(n_1, \dots, n_r)$ leurs multiplicités respectives.
1) Calculer les dimensions de $C(f)$ et $\mathbb{K}[f]$.
2) Montrer qu'il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

$$\dim C(f) = n,$$
$$\dim \mathbb{K}[f] = n,$$
$$r = n,$$
$$\mathbb{K}[f] = C(f).$$