Probabilités (I)

Exercice 1:
1) Soit Ω un ensemble quelconque contenant un ensemble dénombrable Ω_1. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ est une famille sommable de réels positifs dont la somme est 1 alors

$$P \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \sum_{\omega\in A\cap\Omega_1} p_\omega \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.
2) En déduire une probabilité sur $([0,1],\mathcal{P}([0,1])$ telle que pour tout intervalle I non vide et non réduit à un point $P(I)>0$.

Exercice 2: Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$, et Y une variable aléatoire dont la loi sachant $X=k$ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(k)$.
1) Calculer $P(Y=0)$.
2) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 3:
1) Ecrire dans le langage Python une fonction `KparmiN` telle que `KparmiN(n,k)` vale $\binom{n}{k}$.
2) En déduire la programmation d'une fonction `binomiale` telle que `binomiale(n,p,k)` renvoie la valeur (approchée à la précision de la machine utilisée) de $P(X=k)$ si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
3) De même, en programmant auparavant une fonction `factorielle` obtenir une fonction `poisson` telle que `poisson` `(`λ`,k)` renvoie la valeur (approchée à la précision de la machine utilisée) de $P(X=k)$ si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de Poisson de paramètre λ.

Exercice 4: La probabilité qu'un étudiant de classe préparatoire connaissant son cours réussisse le concours x est p, la probabilité qu'un étudiant ne connaissant pas son cours réussisse le même concours est q. La proportion d'étudiants connaissant leur cours est r. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant ayant réussi le concours x connaisse son cours ?

Exercice 5:
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Pour n dans $\mathbb{N}$ on pose $v_n=\sup\limits_{p\geq n} u_p$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et convergente.
Indication : Examiner la monotonie.
On note $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On parle de limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Définir de même la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3) Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n\leq\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n=\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements. Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) =^{(\text{def})} \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

est dans $\mathcal{A}$.
5) Quelle est l'interprétation de : « $\omega\in\limsup_{n\to+\infty} A_n$ » ?
6) Montrer que $P(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n)\geq\limsup\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$. On suppose maintenant la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ formée d'évènements indépendants.
7) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge alors $P\left(\limsup A_n\right)=0$.
8) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge alors $P\left(\limsup A_n\right)=1$.
Indication : Passer au complémentaire.

Exercice 6: Soit n un entier avec $n\geq 2$, soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé avec et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements tels que $(\mathbb{P}(A_i))_{1\leq i\leq n}$ soit une suite arithmétique avec $\mathbb{P}(A_1)=\frac{1}{2^n}$.
1) Exprimer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout i.
2) Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B|A_i)=\frac{1}{2^i}$ pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$. Exprimer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 7: Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ dans $\mathbb{R}^{*+}$ et qu'il existe p dans $[0,1]$ telle que la loi conditionnelle de X sachant $Y=m$ est une loi binomiale de paramètre (m,p). Donner la loi de X.

Exercice 8: Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant une même loi géométrique de paramètre p dans $]0,1[$. Soit $Z = \frac{X}{Y}$.
1) Calculer $E(Z)$ en calculant $\mathbb{P}(Z = r)$ où $r = \frac{a}{b}$ est un rationnel strictement positif avec $a \wedge b = 1$.
2) Justifier $E(Z) = E(X)E(\frac{1}{Y})$. En déduire $E(Z)$.
3) Justifier l'inégalité $\ln x < x - 1$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$. En déduire $E(Z) > 1$. Que dire de ce résultat ?

Exercice 9: Soit X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $\max(X, Y)$(note [1]).

Exercice 10: Soit X et Y deux variables indépendantes, suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p. On not $q = 1 - p$ et $T = \min(X, Y)$ (note [2]).
1) Calculer $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour x dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(T \leq t)$ pour t dans $\mathbb{N}^*$. En déduire la loi de T.
2) Donner $E(X)$ puis $E(\frac{1}{X})$.

Exercice 11: Soit A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(A = i, B = j) = C \frac{e^{-i}}{j^2 + 3j + 2}.$$

1) Déterminer la constante C.
2) Déterminer la loi, l'espérance de A. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?
3) Montrer que pour $n > 23$, l'évènement $5A + 7B = n$ n'est pas négligeable.
4) Généraliser.

Exercice 12: Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier (note [3]). Quelle est la probabilité qu'on ait mangé toutes les pommes ?

Exercice 13: Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 14: Pour ouvrir une serrure, on dispose de n clés. On les essaie successivement, sans remise. Quelle est la probabilité que la serrure s'ouvre au k-ième essai ?

Exercice 15: Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B. quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Exercice 16: Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$, avec $p = \mathbb{P}(Y = -1)$. On considère la variable aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer la probabilité pour que les valeurs propres de M soient réelles.

Exercice 17: Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k > n\right)$ et $v_n = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k < n\right)$.
1) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont monotones.
2) Montrer qu'elles convergent vers la même limite, que l'on précisera.

Exercice 18: Soit I une partie de N. On note $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'entiers indexées par I. Pour une partie X de $\mathbb{N}^{(I))}$ on note $A_I(X) = \{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}; \exists x \in X, \forall i \in I \ a_i = x_i\}$, et

$$\mathcal{A}_I = \{A_I(X); X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^{(I)})\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{A}_I$ est une tribu sur $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.
2) Etant donné deux parties Iet J de $\mathbb{N}$, montrer $\mathcal{A}_{I \cap J} = \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J$.
3) Etant donné deux parties Iet J de $\mathbb{N}$, montrer $\mathcal{A}_{I \cup J}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_J$.

1. Personnellement j'aurais plutôt écrit $\sup(X, Y)$.
2. J'aurais plutôt écrit $\inf(X, Y)$.
3. Essayez dans une soirée, les gens s'arrêteront quand il ne restera plus que des pommes vertes, ou des pistaches fermées.