Probabilités (II)

Exercice 1: *Mines MP*
Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n. Soit j dans $\{1,\dots,n\}$. On dit que la permutation bat un record en j si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout $i < j$. Déterminer la probabilité de l'évènement « σ bat un record en j ».

Exercice 2: *Mines MP*

1) Pour s dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $]-1,1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty}\binom{n}{s}x^{n-s}$.
2) On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à une infinité de tirages indépendants avec remise. On tire une boule blanche avec la probabilité p. Soit r dans $\mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire donnant le temps d'appartition , fini ou infini, de la r-ième boule blanche. Donner la loi de X, sa fonctin génératrice, son espérance et sa variance.

Exercice 3: *X PC*
Soit $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $a + b = 1$.
1) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\binom{2n}{n}a^n b^n$ diverge si et seulemnt si $a = b = \frac{1}{2}$.
On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n. On pose $R : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $P : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.
2) Montrer que P et R sont définies sur $]-1,1[$.
3) Montrer que pour $t \in]-1,1[$ $R(t) = 1 + R(t)P(t)$.
4) Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a = b$.

Exercice 4: *X PSI*
Soit $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$ un paramètre. Des individus numérotés $1, 2, \dots$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Les convives s'installent aux différentes tables avec les conditions suivantes : lorsque le $(k+1)^e$ individu se présente , $k \geq 1$, il choisit au hasard l'un des k individus déjà attablés avec la probabilité $\frac{1}{k+\theta}$ et s'assied à la même table, ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$. On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place.
1) Déterminer $\mathbb{P}(K_n = 1)$.
2) Soit $G - n$ la fonction génératrice de K_n. Montrer que $G_n(x) = \dfrac{L_n(\theta x)}{L_n(x)}$, où $L_n(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.
3) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$. Donner des équivalents de $E(K_n)$ et $V(K_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
4) Etudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 5: *X MP*
On joue à pile ou face. On note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les n premiers lancers, 0 sinon.
1) Montrer qu'il existe un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{e_1 + \cdots + e_n}{n} - \ell\right|\right) \to_{n\to+\infty} 0$.
2) Montrer qu'il existe un $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{e_1e_2 + \cdots + e_{n-1}e_n}{n} - \ell'\right|\right) \to_{n\to+\infty} 0$.

Exercice 6: *X MP*
Soit $\lambda > 0$. Soit X_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $Z_\lambda = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

1) Pour t dans $\mathbb{R}$, calculer la limite lorsque λ tend vers $+\infty$ de $E(\exp(itZ_\lambda))$.
2) Soit a une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Justifier l'existence pour x dans $\mathbb{R}$ de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\exp(itx)\,dt.$$

Déterminer la limite lorsque λ tend vers $+\infty$ de $E(f(Z_\lambda))$.
3) On admet que, pour tout y dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2} + itx)\,dt = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{x^2}{2})$ (note [1]). En déduire une autre expression de la limite obtenue à la question précédente.
4) Généraliser le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 7: *X MP*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K, c > 0$ tels que $\mathbb{P}(S_n > n(\lambda + \epsilon)) \leq Ke^{-cn}$.
2) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K, c > 0$ tels que $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \lambda|) \leq K^{-cn}$.
3) Quelle est la limite presque sûre de $\frac{S_n}{n}$.

Exercice 8: *ENS PC*
Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires à valeurs réelles. On dit que cette suite est transiente si et seulement si, pour toute partie A bornée de $\mathbb{R}$ la série de terme général $P(Y_n \in A)$ est convergente (note [2]). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que cette suite soit transiente.

Exercice 9: *ENS MP*
On considère des variables aléatoires réelles discrètes X, Y et Z. On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $X + Z$.
1) Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
2) Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3) Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?
4) Et si X, Y et Z sont indépendantes ?

Exercice 10: *ENS MP*
Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et telles que $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$ pour $n \geq 1$. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 11: *ENS MP*
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. on pose $\Phi_X : l \in \mathbb{R}^+ \mapsto E(e^{-\lambda X})$. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.

Exercice 12: *Non extrait d'annales de concours*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0, 1[$. On pose pour $n \geq 1$ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.

Montrer que, si a et b sont deux réels avec $a < b$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Indication : Si on pose $b_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $a\sqrt{npq} \leq k - np \leq b\sqrt{npq}$ alors $b_{n,k} \sim \dfrac{e^{-\frac{(n-kp)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}$, uniformément par rapport à k (en ce sens que le rapport tend uniformément vers 1 sur le domaine des k considéré).

1. Et j'espère que vous seriez capable de le démontrer s'il le fallait !
2. Seriez vous capable d'interpréter cette définition dans le langage courant à la lumière du lemme de Borel-Cantelli ?