Espaces préhilbertiens

Exercice 1:
1) Exprimer le projeté orthogonal $\pi_F(x)$ de x sur le sous-espace vectoriel F de l'espace préhilbertien réel E lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base **orthogonale** de F.
2) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de F la détermination du projeté se ramène à la résolution d'un système linéaire. Résoudre ce système pour $n = 2$. Que peut-on dire du déterminant de ce système dans le cas général ?

Exercice 2:
1) Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel déterminer la matrice de la projection orthogonale sur l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
2) Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z + t = x + 2y - 2z + 4t = 0$.

Exercice 3: Dans un espace préhilbertien E, si un sous-espace F est tel que $E = F \oplus F^\perp$ alors $F = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 4: Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. On définit sur $M_n(\mathbb{R})$ un produit scalaire en posant $(A|B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)$.
1) Que dire de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire ?
2) Pour $A = (a_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ calculer : $\displaystyle\min_{B \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{i,j} - b_{i,j})^2$.

Exercice 5: Soit E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires de E tel que : $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 6: Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 - at - bt^2)^2 \, dt$.

Exercice 7: On se place dans un espace euclidien de dimension n. On considère $n + 1$ vecteurs unitaires distincts $(e_0, \ldots, e_n)$ tels qu'il existe α_n avec $(e_i|e_j) = \alpha_n$.
1) Quelle est la valeur de α ?
2) Montrer qu'une telle famille existe bien.
Indication : Raisonner par récurrence sur n. Si $E = E' \oplus^\perp \mathbb{R}e$ et si $(e'_0, \ldots, e'_n)$ est une solution du problème sur E' chercher une solution sur E de la forme $(ue'_0 + te, \ldots, ue'_n + te, e)$, pour u et t des réels bien choisis.
3) Application numérique : $n = 3$. En déduire l'angle entre deux branches C$-$H dans la molécule de méthane.

Exercice 8: Soit C une partie convexe, non vide et fermée dans un espace euclidien (préhilbertien réel de dimension finie) E. Soit x un point de E.
1) Montrer qu'il existe un y tel que

$$\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

2) Montrer qu'un tel z est unique
Indication : Utiliser l'identité du parallélogramme.
3) Montrer que : $\quad \forall z \in C \quad (x - y|z - y) \leq 0 \qquad (*)$
4) Si pour y est dans C et vérifie $(*)$ alors $\|x - y\| = d(x, C)$.