Endomorphismes symétriques

Exercice 1: Soit a et b deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. A quelle condition l'endomorphisme $u : x \mapsto x + (a|x)b$ est-il symétrique ?

Exercice 2: Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E, de dimension $n \geq 1$.
1) Montrer que $\lambda = \sup_{\|x\|=1}(u(x)|x)$ existe et qu'il existe un x_0 avec $\|x_0\| = 1$ tel que $\lambda = (u(x_0)|x_0)$.
2) On pose $q(x) = (\lambda x - u(x)|x)$. Montrer que $q(x) \geq 0$ pour tout x dans E.
3) En développant $q(x_0 + ty)$ pour t réel, montrer que $u(x_0) = \lambda x_0$.
4) En déduire par récurrence sur $\dim E$ que u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Exercice 3:
1) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, antisymétrique. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset i\mathbb{R}$.
2) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, orthogonale. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Exercice 4:
1) Si A est une matrice symétrique réelle et a un réel tels que $A^3 = a^3 I_n$ alors $A = aI_n$.
2) Si A et B sont deux matrices symétriques réelles telles que $A^3 = B^3$ alors $A = B$.
Indication : On posera $C = A^3 = B^3$. On commencera par étudier le cas où C est diagonale, pour se ramener à la question précédente aprés avoir prouvé que A et B sont diagonales par blocs. On traitera ensuite le cas général en réduisant C.

Exercice 5: Soit M une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = UT$.
2) Si $M = (m_{i,j})$, établir que $|\det M| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \right)^{1/2}$.

Exercice 6: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I + {}^tAA) \geq 1$.

Exercice 7:
1) Montrer que $\mathcal{O}(E)$, l'ensemble des isométries vectoriellles est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.
2) Montrer que l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^3$ conservant le cube $C = \{x \in \mathbb{R}^3, |x_i| = 1; 1 \leq i \leq 3\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.
3) Montrer que ce groupe est fini. Quel est son cardinal ?

Exercice 8: On note $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det u = 1\}$.
1) Montrer que $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.
2) Montrer que u est dans $\mathcal{SO}(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M_r \end{pmatrix} \text{ où } M_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}, \quad \theta_k \in]0, 2\pi[.$$

3) En déduire que $\mathcal{SO}(E)$ est connexe par arcs.

Exercice 9: Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme symétrique. Pour x dans E on pose $f(x) = \|u(x)\|^2 - (u(x)|x)^2$.
1) f est-elle minorée ?
2) A quelle condition f est-elle majorée ?

Exercice 10:
1) Soit A une matrice réelle montrer que $B = {}^tAA$ est symétrique réelle et que ses valeurs propres sont positives.
2) Réciproquement si B est une matrice symétrique ont les valeurs propres sont positives alors il existe une matrice A telle que $B = {}^tAA$.
3) Si A est une matrice inversible, montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients strictements positifs telles que $A = QT$.
4) Si A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives alors il existe une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs telle que $A = {}^tTT$.
5) Ecrire en Python une fonction qui à A associe T. En déduire que T est unique. On ne calquera pas la démonstration théorique mais on procèdera par identification en considérant les coefficients de T comme des inconnues.
Indication : Pour voir dans quel ordre calculer les coefficients de T, on aura intérêt à poser le calcul pour $n = 2$, puis $n = 3$.

Exercice 11: Soit A une matrice de $M_{3,2}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles qu'il existe une matrice orthogonale P vérifiant

$$AB = {}^tP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P.$$

Calculer BA.

Exercice 12: On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique orientée.Soit $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\theta \in]0, \pi[$ et $v = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = \epsilon_1$ et $v_2 = (\cos\theta)\epsilon_1 + (\sin\theta)\epsilon_2$. Soit ϕ dans $L(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base v est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$.
1) Calculer $\|v_1\|^2$, $\|v_2\|^2$ et $< v_1, v_2 >$.
2) Soit y dans $\mathbb{R}^2$, $y = y_1v_1 + y_2v_2$. Calculer $\|y\|^2$ et $\|\phi(y)\|^2$. Montrer que ϕ appartient à $O(\mathbb{R}^2)$.
3) Soit P la matrice de passage de ϵ à v. Calculer P^{-1}.
4) Exprimer la matrice M' de ϕ dans la base canonique.

Exercice 13: Soit $(E, < ., . >)$ un espace euclidien, a et b deux vecteurs unitaires indépendants et $u : x \in E \mapsto < b, x > a + < a, x > b$.
1) Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
2) Trouver le noyau de u.
3) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 14:
1) Trouver les matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes.
2) Trouver les matrices de $A_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes.
3) Le résultat subsiste-t-il dans $S_n(\mathbb{C})$ et $A_n(C)$?

Exercice 15: Soit A une matrice symétrique définie positive de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que cela veut dire que ses valeurs propres sont strictement positives.
1) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$ alors $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
2) En déduire que $\det(A) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}\,(A)}{n}\right)^n$.
3) Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ montrer que pour tout i $a_{i,i} > 0$.
4) En déduire $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
5) Si M est inversible, montrer que ${}^tMM$ est symétrique définie positive.
6) En déduire l'inégalité de Hadamard : $(\det(M))^2 \leq \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j}^2)$.