Chauffe Mathématiques 2018 MP*2

ANONYME 1

Ex 1: *CCS 2017*
On cherche à prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.
1) Montrer que l'intégrale converge.
2) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t(1+t^2)} dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$F'(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{(1+t^2)^2} dt.$$

Finalement en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
3) Montrer que $F'' - F$ est constante sur $\mathbb{R}^{*+}$, puis en déduire le résultat.

Ex 2: *X 2017*
Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{\frac{k}{q}; 0 \leq q \leq q-1\}$, où q est un entier fixé au moins égal à 2. On se donne un τ dans $\mathbb{R}$ et on définit une suite de variable aléatoire $(T_n)_{n\geq 0}$ par

$$T_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 0 \quad T_{n+1} = T_n + \tau + \sin(2\pi(T_n - \phi_n)).$$

Calculer $\mathbb{E}(T_n)$.

Ex 3: *X 2017*
(En fin d'oral) Tracer dans le plan la courbe d'équation $x^2 = y^3$.

Ex 4: *X 2017*
f est une application continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. ϵ est dans $\mathbb{R}^{*+}$
1) Montrer qu'il existe c tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq \epsilon + c|x - y|^2.$$

2) Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes (d'espace vectoriel) de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que, si on note e_k l'application $t \mapsto t^k$:
— $\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})\ \forall n \in \mathbb{N}\ f \geq 0 \Rightarrow D_n(f) \geq 0$.
— $(D_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) vers e_k sur $[a, b]$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

Montrer que pour tout f de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ la suite $(D_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) vers f.
3) (*Ajoutée par votre professeur*) Montrer que le théorème de Weierstrass est la conséquence de ce résultat, si on l'applique à la suite des polynômes de Bernstein associés à f.

Ex 5: *ENS Cachan 2017*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose u de rayon de convergence infini et non constante.
1) Montrer que : $\forall \epsilon > 0\ \exists z\ |z| < \epsilon$ et $|u(z) > |a_0|$.
2) Montrer que : $\forall R \geq 0\ \sup_{|z|\leq R} |u(z)| = \sup_{|z|=R} |u(z)|$.
3) Montrer que : $\forall r \geq 0\ |u'(0)| \leq \frac{2}{r} \sup_{|z|=r} |u(z)|$.

Ex 6: *ENS CLPR 2017*
Pour A dans $M_n(\mathbb{C})$ on note $A^* = {}^t\overline{A}$, $\|A\| = \mathrm{tr}\,(A^*A)$ (on admet qu'il s'agit d'une norme) et $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A^*A = I_n\}$ ($U_n(\mathbb{C})$ *s'appelle le groupe unitaire*).
1) Prouver que $\|PA\| = \|A\| = \|AP\|$ pour tout P dans $U_n(\mathbb{C})$.
2) On note $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $U_n(\mathbb{C})$:

$$\|I_n - AB\| \leq \sqrt{2}\|I_n - A\|\,\|I_n - B\|.$$

— Commencer par étudier le cas où A est diagonale.
— Généraliser, en admettant que pour toute matrice A de $U_n(\mathbb{C})$ il existe P dans $U_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

3) Soit A et B dans $U_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer qu'elles sont simultanément unitairement diagonalisables.

4) Soit A et B dans $U_n(\mathbb{C})$ telles que $\|I_n - B\| \leq 2$ et $A[A, B] = [A, B]A$. Prouver que $AB = BA$.
Indication : On pourra considérer $C = BAB^{-1}$, prouver que $CA = AC$, prouver que $C = PAP^{-1}$ avec P matrice de permutation, car C et A ont même polynôme caractéristique et sont simultanément diagonalisables. Considérer ensuite $M = P^{-1}B\ldots$(L'exercice n'a pas été terminé par manque de temps).

Ex 7: *ENS Lyon 2017*
Lister tout les groupes d'ordre 8 (à un isomorphisme près), plus précisément : un groupe d'ordre 8 est isomorphe :
— à $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ s'il possède un élément d'ordre 8,
— à $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ s'il ne possède pas d'élément d'ordre 8 mais un élément a d'ordre 4 et un élément b d'ordre 2 n'appartenant pas à $< a >$ et vérifiant $ab = ba$,
— à $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^3$ s'il ne possède que des éléments d'ordre 2,
— au groupe engendré par $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'il possède un élément a d'ordre 4 et un élément b d'ordre 2 vérifiant $ab \neq ba$.

Ex 8: *CCMP 2017*
Nature de la série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha} \displaystyle\int_0^n e^{t^\alpha}\, dt$?

Ex 9: *CCMP 2017*
Soit A une $\mathbb{R}$ algèbre commutative intègre, de dimension au moins 2.
1) Montrer que A est un corps.
2) Que dire du polynôme minimal des éléments de A.
3) Montrer que A est isomorphe à C.

ANONYME 2

Ex 10: *CCS 2017*
On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel pour lequel elle est orthonormale.
u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est M.
1) Faire une conjecture sur

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$$

lorsque x décrit la base $\mathcal{C}$.
2) Montrer que χ_M est de la forme $(X^2 + aX + b)^2$ où a et b sont réels. Déterminer a et b. En déduire un polynôme annulateur de M.
3) Déterminer un plan F stable par u.
4) Déterminer la matrice de u dans une base orthonormale de F, puis montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs.
5) Prouver la conjecture.

Ex 11: *CCS 2017*
On considère $f(x) = x^3 + x$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on définit $u_n(x)$ par $u_0(x) = x$ et u_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangent au graphe de f en $u_n(x)$ avec la droite horizontale d'ordonnée x (note [1]).
1) Montrer que f est bijective, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2) Montrer que $u_{n+1}(x)$ est donnée par $u_{n+1}(x) = N_x(u_n(x))$ avec

$$N_x(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

En déduire que pour étudier la convergence de la suite $(u_n(x))_{n\geq 0}$ on peut se restreindre au cas $x \in \mathbb{R}^+$.
3) Peut-on avoir la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$?
4) Montrer que $0 \leq N_x'(t) \leq \frac{2}{3}$ pour tout t de $\mathbb{R}^+$. Conclure.

Ex 12: *CCP 2017*
On considère, pour tout n dans $\mathbb{N}*$ la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1 + n^4x^4}$.
1)
  a) Prouver que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
  b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$?
  c) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, +\infty[$? sur $[0, +\infty[$?
2) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ex 13: *CCP 2017*
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que A est diagonalisable.
2) Calculer A^n, pour n entier.

Ex 14: *Petites Mines 2017*
Déterminer le cardinal de $M_n(\mathbb{Z}) \cap O_n(\mathbb{R})$.

Ex 15: *Petites Mines 2017*
Soit $n \geq 2$ un entier. On choisit de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n. Soit p un nombre premier, et soit A_p l'évènement « l'entier choisi est divisible par p ».
1) Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2) Montrer que si $(p_1, \ldots, p_r)$ sont des diviseurs premiers de n alors les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3) On désigne par ϕ la fonction indicatrice d'Euler. En vous servant du résultat précédent prouver :

$$\phi(n) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Ex 16: *Saint-Cyr 2017*
Montrer que la somme des carrés des coefficients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés de ses valeurs propres.

Ex 17: *Navale 2017*
Etudier $f(x) = \int_0^x \sin(\frac{1}{t})\, dt$.

Ex 18: *Navale 2017*
1) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A^tA = {}^tAA$. Déterminer A
2) Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^tA = I_n$.

1. On cherche donc à résoudre $f(t) = x$ par la méthode de Newton

Ex 19: *Navale 2017*
Soit M une matrice donts les colonnes sont $(C_1, \dots, C_n)$. Soit $\phi : \mathbb{K}^n \to K^n$ qui à x associe

$$(\det(x, C_2, \dots, C_n), \dots, \det(C_1, \dots, C_{i-1}, x, C_{i+1}, \dots, C_n), \dots, \det(C_1, \dots, C_{n-1}, x)).$$

Dire tout ce que vous pouvez sur l'application ϕ.

ABITBOUL Yohann

Ex 20: *CCS 2017*
On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.
1) Calculer $F(2)$.
2) Ecrire en Python une fonction permettant de calculer $F(x)$. vérifier pour $x = 2$.
3)
 a) Domaine de définition de F.
 b) Tracer le graphe de F. Conjecturer certaines propriétés de F.
4) Déterminer les limites de F aux bornes de son intervalle de définition.
5) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
6) Prouver la monotonie de F.
7) D'autres questions, avec apparition d'une série. En coupant l'intégrale en 1, puis en faisant le changement de variable dans une des intégrales pour se ramener à une intégrale sur $]0, 1]$, puis en permutant intégrale et sommation, on peut écrire F comme la somme d'une série de fonctions.

ALLARD Benjamin

Ex 21: *CCS 2017*
E est un espace vectoriel de dimension finie, u est un endomorphisme de E. Pour tout p dans $\mathbb{N}$ on pose $K_p = \ker u^p$, $I_p = \text{Im } u^p$.
1) Déterminer K_0 et I_0. Montrer que $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(I_p)_{p\in N}$ sont respectivement croissantes et décroissantes.
2) Trois endomorphismes de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^6$ étaient donnés explicitement. Il fallait utiliser Python pour étudier pratiquement les suites de la questions précédentes et faire une conjecture. Expliquez comment vous auriez fait.
 a) Montrer que la suite $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est d'abord strictement croissante, puis stationnaire à partir d'un rang r.
 b) L'inverse pour $(I_p)_{p\in N}$ (avec le même r).
 c) Déterminer ce r pour chacun des endomorphismes de la question 2.
3) Montrer $K_r \oplus I_r = E$.
4)
 a) Si u est nilpotent alors r est égal à son indice de nilpotence.
 b) Condition nécessaire et suffisante pour que u soit un automorphisme.
 c) Valeur de r si u est un projecteur ?
5) Il y avait d'autres questions.

Ex 22: *CCS 2017*
Soit E un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$. Soit K une partie convexe de E.
1)
 a) Montrer que l'adhérence de K est convexe.
 b) Montrer que l'intérieur de K est convexe.
2) Soit x dans l'intérieur de K et y dans K, montrer que $[x, y[$ est contenu dans l'intérieur de K.
3) Montrer que si K est dense dans E alors $K = E$.

Ex 23: *CCMP 2017*
1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n, f et g deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = n$ et $f + g = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f et g sont des projecteurs.
2) Le résultat similaire pour trois endomorphismes est-il valable ?

Ex 24: *CCMP 2017*
On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,dt.$$

1) Montrer que

$$\forall x \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2) En déduire la convergence simple de $(u_n)_{n\geq 0}$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction u sur $[0,1]$ qui vérifie l'équation différentielle $u'(x) = u(x-x^2)$.

BAIN Nathan

Ex 25: *ENSEA 2017*
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+\cdots+n^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Ex 26: *ENSEA 2017*
Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$, $\lambda = a+ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) une valeur propre complexe de A, X un vecteur propre (complexe) associé.
1) Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de A.
2) Soient $U = \frac{1}{2}(X+\overline{X})$ et $V = \frac{1}{2i}(X-\overline{X})$. exprimer AU et AV a l'aide de U, V, a et b.
3) On suppose A diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs (de taille 1 ou 2).

Ex 27: *CCP 2017*
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{C}$, continue. soient a et b réels tels que $0 < a < b$
1)
   a) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \int_0^b \frac{f(xt)}{t}\,dt$.
   b) Montrer qu'il existe ℓ tel que $\lim_{x\to 0^+} \int_{xa}^{xb} \frac{f(t)}{t}\,dt = \ell$.
   c) On suppose que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = \ell$.

Ex 28: *CCP 2017*
$\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes. Soit a_1, a_2 et a_3 trois scalaires distincts dans $\mathbb{K}$.
1) Montrer que

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ & & P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   a) Justifiez que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 à l'aide de a_1, a_2 et a_3.
3) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4) Application : On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois $A(0,1)$, $B(1,3)$ et $C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C (note [2]).

2. En toute rigueur : une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ dont chaque fonction coordonnée est un polynôme de degré au plus 2.

Ex 29: *CCP 2017*
Soit λ dans $\mathbb{R} - 2\mathbb{Z}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $a_0 \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-\lambda}{n+1}$ (note [3]).
1) Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
2) Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie une équation différentielle et donner une expression simple de f.

Ex 30: *CCP 2017*
Soit E un espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si Ker f est fermé.

Ex 31: *CCMP 2017*
Soit E un espace euclidien de dimension n $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (non nécéssairement orthonormale) . Soit

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i.$$

1) Montrer que f est un endomorphime inversible.
2) Montrer que f est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.
3) Montrer qu'il existe g symétrique tel que $g^2 = f^{-1}$.
4) En déduire qu'il existe une base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ orthonormale et telle que $(f(\epsilon_1), \ldots, f(\epsilon_n))$ soit orthogonale.

Ex 32: *CCMP 2017*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,$p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq n$. On se donne $p+1$ urnes U_i, $0 \leq i \leq p$. Chaque urne U_i contient i boule blanches et $p-i$ boules noires. On choisit au hasard une urne dans laquelle on tire n boules. X_p est la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches du tirage.
1) Donner la loi de X_p.
2) Donner l'espérance de X_p.
3) Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(X_p = k)$, à k et n fixés.

BAUJEU Léo

Ex 33: *CCS 2017*
Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et bornées ($X_k(\Omega) \subset [a, b]$). On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
1) On suppose (uniquement dans cette question) que les X_k suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.
   a) Donner la loi de S_n.
   b) Donner le majorant $\phi(t)$ obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev tel que

$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|S_n - E(S_n)| \geq t\sqrt{n}) \leq \phi(t).$$

   c) Tracer $\mathbb{P}(|S_n - E(S_n)| \geq t\sqrt{n})$ et $\phi(t)$ sur un même graphe, pour $n = 100$, $p = 0,25$ et $t \in [0, 3]$. On imposera l'échelle des ordonnées entre 0 et 1. Commentaire ?
2) Soit $c < d$ deux réels, soit $\delta > 0$.
   a) Montrer que

$$\forall y_in[c, d] \quad e^{\delta y} \leq \frac{d-y}{d-c}e^{\delta c} + \frac{y-c}{d-c}e^{\delta d}.$$

   b) Montrer que

$$\ln\left(\frac{d}{d-c}e^{\delta c} - \frac{c}{d-c}e^{\delta d}\right) \leq \frac{\delta^2(d-c)^2}{8}.$$

3) Soit Y une variable aléatoire centrée telle que $Y(\Omega) \subset [c, d]$. Montrer que :

$$E(e^{\delta Y}) \leq e^{\frac{\delta^2(d-c)^2}{8}}.$$

4)

3. Bien que cela ne soit pas demandé par l'énoncé, il peut être intéressant de justifier que pour tout a_0 il existe une et une seule suite vérifiant ces relations.

a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n - E(S_n) \geq \epsilon) \leq e^{-\delta\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{\delta(X_i - E(X_i))}.$$

b) Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n - E(S_n) \geq \epsilon) \leq \exp\left(-\delta\epsilon + n\frac{\delta^2(d-c)^2}{8}\right).$$

c) Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n - E(S_n) \geq \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

En déduire un nouveau majorant $\psi(t)$ de $\mathbb{P}(|S_n - E(S_n)| \geq t\sqrt{n})$ et tracer son graphe à l'aide de Python. Commentaire ?

Ex 34: *CCS 2017*
Soit α et β les racines de $X^2 - X - 1$ $\alpha > \beta$. On pose $A = \{z \in \mathbb{R}; \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2\ z = x + y\alpha\}$.
1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2) On pose, pour $z = x + y\alpha$ dans A, $\sigma(z) = x + y\beta$. Montrer que σ définit un automorphisme de l'anneau A. Calculer σ^{-1}. Que dir de σ^{-1}.
3) On définit, pour z dans A, $N(z) = z\sigma(z)$. Soit U le groupe des unités de A (c'est-à-dire l'ensemble des éléments inversibles de A). Montrer que z est dans U si et seulement si $N(z) = 1$.
Question subsidiaire : à quoi vous fait penser $N(z)$ dans un autre contexte ?
4) Il restait d'autres questions.

Ex 35: *CCMP 2017*
Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ symétrique. On pose $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que B est un polynôme en A.

Ex 36: *CCMP 2017*
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $n = \circ(p_n)$. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n} = 0.$$

Ex 37: *CCMP 2017*
1) Question de cours : définir l'indicatrice d'Euler, en donner toutes les propriétés que vous connaissez.
2) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers tels que $\phi(n) = \frac{n}{3}$.
3) (Fin d'oral) Donner une piste pour la démonstration de $\phi(mn) = \phi(m)_phi(n)$ si $m \wedge n = 1$.
Puis, on pose $P = X^n - 1$, $Q_m = \prod\limits_{\substack{k\in[1,m] \\ k\wedge m=1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{m}})$. Peut-on écrire P_n à l'aide de certains Q_m ?

Ex 38: *X 2017*
On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a_0, \quad u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad u_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad u_3 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \text{etc}\ldots$$

1) Montrer que pour tout n $u_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Indication : Par récurrence en exprimant u_{n+1} comme un « u_n ».
2) Montrer que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
Indication : Considérer $y_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.
3) Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^{*+}$. Montrer qu'il existe un x réel et une infinité de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \phi(q)$.

Ex 39: *X 2017*
Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est (strictement) positive si ses coefficients sont (strictement) positifs, de même pour un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Une matrice A est réductible si elle est nulle ou semblable à une matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, B et D matrices carrées de taille au moins 1. Sinon on dit que A est irréductible.
1) Soit A positive et irréductible, montrer que $(I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.
Indication : (Donnée) Montrer que si Y est positif non nul alors $Z = (I_n + A)Y$ possède strictement moins de coefficients non nul que Y (si Y en possède au moins 1.
2) Soit X un vecteur positif non nul. On pose $r(X) = \max_{x_i \neq 0} \frac{AX)_i}{x_i}$ où A est positive fixée. On pose $E = \{X \in (\mathbb{R}^+)^n ; \|X\| \leq 1\} = \overline{B}(0,1)$, $F = \operatorname{Im}\left((A + I_n)^{n-1}\right)$. Montrer que $\max_F r$ est atteint puis que $\max_E r$ est atteint, puis que $\max_E r = \max_F r$.

BLANC Alexis

Ex 40: *CCS 2017*
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont dans $\{0, 1, 2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_n le nombre de polynômes dans $\mathcal{P}$ tel que $P(2) = n$.
1) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2) Justifier la définition de a_n, i.e. que a_n est un nombre fini.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = a_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = a_{n-1} + a_n$.
4) Ecrire un programme Python permettant de calculer les a_n. On pourra vérifier que $a_{594} = 39$.
5) Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
6) Oubliée.
7) On définit $f_n(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (1 + x^{2^i} + x^{2^{i+1}})$.
Tracer f_n sur l'intervalle $I = [-9/10, 9/10]$ pour $n \in [1, 10]$.
8) Montrer que f_n converge simplement vers $f : x \mapsto \sum a_n x^n$.
9) (Il y avait d'autres questions). Montrer que

$$\prod_{i=0}^{+\infty} (1 + x^{2^i} + x^{2^{i+1}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

pour $|x| < 1$.

Ex 41: *CCMP 2017*
Soit $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
1) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(t) |\sin(nt)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} f\left(\frac{t + k\pi}{n}\right) \sin(t) \, dt.$$

2) En étudiant

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin(t) \, dt,$$

trouver

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) |\sin(nt)| \, dt.$$

Ex 42: *CCMP 2017*
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1) Montrer que : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[X], M \longmapsto \chi_M$ est continue.
2) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé : en donner deux justifications.
3) Soit $S(A) = \{PAP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\}$. On suppose que la matrice nulle appartient à l'adhérence de $S(A)$. Montrer que A est nilpotente. Réciproque ?

BOCQUET Adrien

Ex 43: *CCMP 2017*
Soit P dans $\mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.Montrer que pour tout k de $[0, n]$ $|a_k| \leq M$.

Ex 44: *CCMP 2017*
Soit
$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt.$$
1) Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}\, dt.$$
3) Donner un équivalent de φ' en 0. Que peut-on en déduire ?
4) φ est-elle dérivable en 0 ?

Ex 45: *CCS 2017*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
$(.|.)$ est le produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$.
1) A est-elle diagonalisable ? Donner les éléments propres de A à l'aide de Python.
2) Coder une fonction `PuissIter(A,n)` qui tire un vecteur $X = {}^t(x, y, z)$ au hasard puis définit une suite $(Y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ par $Y_0 = \frac{1}{\|AX\|}AX$, puis $Y_{k+1} = \frac{1}{\|AY_k\|}AY_k$, pour $0 \leq k \leq n-2$. Cette fonction renvoie le couple (v, Y_{n-1}) où $v = (AY_{n-1}|Y_{n-1})$. Appliquer à A et $n = 20$. Que constate t'on ?
3) Démontrer la conjecture dans le cas A symétrique.
4) On définit, si (λ_1, V_1) est la limite de la suite précédente.
$$B = A - \frac{\lambda_1}{\|V_1\|^2} V_1 {}^tV_1.$$
Montrer que par le même procédé on peut obtenir une deuxième valeur propre de A, puis la suite des valeurs propres de A dans l'ordre décroissant des modules des valeurs propres.
5) Le résultat est-il vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Ex 46: *CCS 2017*
Pour tout (s, t) de $[0, 1]^2$ $a(t, s) = s(1-t)$ si $s \leq t$, $t(1-s)$ si $t \leq s$. E est l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$. Finalement on définit T par
$$\forall f \in E\ \forall t \in [0, 1] \quad T(f)(t) = \int_0^1 a(t, s) f(s)\, ds.$$
1) Montrer que T est un endomorphisme continu de E.
2) Montrer que $T(f)$ est deux fois dérivable. Calculer $T(f)(0)$, $T(f)(1)$ et $T(f)''$. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
3) Les autres questions n'ont pas été traitées.

Ex 47: *ENS Lyon-Cachan 2017*
G est une groupe, $X \subset G$, $C_G(x) = \{g \in G; \forall x \in X\ xg = gx\}$ (commutant de X dans G).
On choisit $G = GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = C$. Montrer que pour tout X contenu dans G il existe $X_0 \subset X$ fini tel que $C_G(X_0) = C_G(X)$. (Indice : que dire pour $M_n(\mathbb{K})$?)

Ex 48: *ENS Lyon-Cachan 2017*
Soit G un groupe tel que pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de e il existe g tel que $gxg^{-1} = y$. Montrer que G est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Ex 49: *ENS Lyon-Cachan 2017*
Soit E l'ensemble $\{0, 1\}^n$, n entier non nul. Soit r un entier tel que $2r \leq n-1$. On note C le cardinal maximal d'un sous-ensemble X de E tels que

$$\forall (A, B) \in X^2 \quad |B - A| \leq 2r$$

où $|A| = \sum_{i=1}^n |a_i|$. On voudrait montrer que $C = \sum_{p=0}^{r} \binom{n}{p}$.

1) Montrer $C \geq \sum_{p=0}^{r} \binom{n}{p}$.
2) Montrer le résultat pour $R = 1$, $n = 3$.
3) Questions intermédiaires.
4) Montrer le résultat.

BRAUN Louison

Ex 50: *CCS 2017*
On modélise des lancers infinis de pile ou face par des suites de 0 et de 1. Les lancers sont indépendants et pile et face sont équiprobables. On note A_n l'évènement « on n'obtient que des faces à partir du n-ième lancer », et A l'évènement « la suite de lancers se termine par une suite de faces ».
1)
  a) Montrer que $\mathbb{P}(A_n) = 0$, puis $\mathbb{P}(A) = 0$.
  b) Montrer que A est dénombrable.
2) On note B_ℓ l'évènement « il n'y a pas de 00 parmi dans les ℓ premiers lancers ».
  a) Programmer une fonction en Python prenant en paramètre ℓ et n et qui renvoie la proportion de suites vérifiant B_ℓ parmi n suites aléatoires. Conjecturer les valeurs de $\mathbb{P}(B_\ell)$ pour $\ell = 2$, 3 et 4.
  b) Retrouver ces valeurs par le calcul.
3) Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
  a) Montrer que $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements mutuellement indépendants.
  b) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(C_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{m\geq n} C_m\right) = 1.$$

  c) En déduire que la probalilité d'avoir 00 dans une suite de lancers est 1.

Ex 51: *CCS 2017*
1) Si M est dans $M_n(\mathbb{R})$, exprimer le rang de $\mathrm{Com}(M)$ à l'aide de celui de M.
2) Si $\mathrm{rg}\,(M) = 1$ condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable. Si elle n'est pas diagonalisable, montrer que M est semblable à $E_{1,2}$.
3) Montrer que si deux matrices sont semblables leurs comatrices sont semblables.

Ex 52: *CCMP 2017*
Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ on pose

$$u_n = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \qquad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
2) En déduire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Ex 53: *CCMP 2017*
1) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, telle que pour toute matrice B semblable à A : $b_{2,1} = 0$. Caractériser A.
2) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, telle que pour toute matrice B semblable à A : $b_{1,1} = 0$. Caractériser A.

Ex 54: *X 2017*
On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a_0, \quad u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad u_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad u_3 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \text{etc}\dots$$

1) Montrer que pour tout n $u_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Indication : Par récurrence en exprimant u_{n+1} comme un « u_n ».
2) Montrer que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
Indication : Considérer $y_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.
3) (Sans rapport avec l'exercice) Caractériser algébriquement les projecteurs orthogonaux.

Ex 55: *X 2017*
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites de réels ($n \in \mathbb{N}^*$). Etudier la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1} y_n \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_{n-1} & 1 + x_n y_n \end{pmatrix}$$

Ex 56: *X 2017*
Calculer

$$B_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Ex 57: *X 2017*
Soit α, β et γ les angles d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{8}{3 + 2\cos\beta}.$$

Indication :
— Etablir et utiliser la convexité de $\frac{1}{\sin}$,
— Etudier le signe d'un polynôme en $\cos(\frac{\gamma}{2})$.

CADILLON Alexandre

Ex 58: *CCS 2017*
On définit une suite polynomiale $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$H_0 = 1,\ H_1 = X,\ H_{k+2} = XH_{k+1} - \frac{k+1}{2}H_k \text{ pour } k \geq 0.$$

1) A l'aide de Python calculer les termes H_k pour $1 \leq k \leq 10$. Que dire du degré, du coefficient dominant et de la parité des termes de la suite.
2) Relation entre H_{k+1} et H_k. Déterminer alors la relation ente H_k et $2XH_k' - H_k''$.
3)
   a) Déterminer à l'aide de Python les racines des H_k pour $1 \leq k \leq 10$. Remarques ?
   b) Montrer que les H_k sont scindés à racines simples.
4) Calculer la somme des carrés des racines de H_k pour $1 \leq k \leq 10$. Conjecturer le résultat général et le démontrer.
5) Il restait des questions.

Ex 59: *CCS 2017*
Soit E un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$. Soit K une partie convexe de E.
1)
   a) Montrer que l'adhérence de K est convexe.
   b) Montrer que l'intérieur de K est convexe.
2) Soit x dans l'intérieur de K et y dans K, montrer que $[x, y[$ est contenu dans l'intérieur de K.
3) Montrer que si K est dense dans E alors $K = E$.

Ex 60: *CCMP 2017*
Soit

$$\begin{array}{rccl} f & : & A_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ & & X & \mapsto & (I_n + X)(I_n - X)^{-1} \end{array}$$

1) Montrer que f est bien définie.
2) Montrer que $f(A_n(\mathbb{R})) \subset SO_n(\mathbb{R})$.
3) A-t-on $f(A_n(\mathbb{R})) \subset SO_n(\mathbb{R})$?
4) Décrire $SO_n(\mathbb{R})$

Ex 61: *CCMP 2017*
Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$A = \{f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1\}.$$

1) Montrer que A est fermée.
2) Déteminer $d(0, A) = \inf_{f\in A} \|f\|_\infty$.
3) Oubliée. Peut-être : démontrer que cette distance n'est pas atteinte en un élément de A.

CHAMBE Cyril

Ex 62: *CCS 2017*
Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,i} = 0$, $m_{i,i+2k+1} = 1$, $m_{i,i+2k+2} = 3$, $m_{i+2k+1,i} = 3$ et $m_{i+2k+2,i} = 1$, i et k étant des entiers tels que les indices aient un sens.
1)
   a) Si $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ calculer les premières puissances de A. Que peut-on conjecturer ?
   b) Donner les valeurs propres de A.
   c) Prouver la conjecture.

2) On prend $n = 2p+1$
   a) Montrer que la somme des coefficients de M sur chaque ligne est une constante, notée s_n, à déterminer en fonction de p.
   b) On pose $N = \frac{1}{s_n}M$. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(N)$ et que pour tout λ de $\mathrm{Sp}(N)$ on a $|\lambda| \leq 1$.
   c) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$ et $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$. Donner une base de $E_1(N)$.
3)
   a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et un matrice inversible P telles que N^p tende vers PDP^{-1}.
   Indication : Utiliser la décomposition $D + N$.
   b) Conclure.

Ex 63: *CCS 2017*
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + py = 0$, où $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{*+})$. Soit f_0 une solution strictement positive de (E) et $f = \frac{f_0'}{f_0}$.
1) Montrer que $f' = -q - f^2$.
2) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \geq a$ $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \geq x - a$.
3) Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que si $Q(x) = \int_x^{+_infty} q(t)\,dt$ alors $xQ(x) = \mathcal{O}(1)$ et $\inf_{x\in[a+\infty[} xQ(x) \leq \frac{1}{a}$. Qu'en déduire pour la limite de f en $+\infty$?

Ex 64: *X 2017*
Soit A une algèbre, V un espace vectoriel. Une trace est une application linéaire τ de A vers V telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tout (a, b) dans A^2. On note T l'espace des traces. Si $(a, b) \in A^2$ on note $[a, b] = ab - ba$ et $[A]$ l'espace engendré par les $[a, b]$, (a, b) parcourant A^2. On définit sur A une relation $\sim$ par $a \sim b$ si et seulement si $a - b \in [A]$.
1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2) On note $H_0(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$. Montrer que la structure d'espace vectoriel de A induit sur $H_0(A)$ une structure d'espace vectoriel.
3) Montrer que
$$\begin{array}{cccc} \tau & : & A & \to & H_0(A) \\ & & a & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$
est une trace.
4) Montrer que T est isomorphe à $L(H_0(A), V)$.

Ex 65: *X 2017*
Montrer que $te^t = x$, $t > 0, x > 0$ admet une unique solution en t à x fixé. En donner un équivalent lorsque $x \to +\infty$, puis le terme suivant dans le développement asymptotique.

Ex 66: *X 2017*
Montrer que deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Ex 67: *X 2017*
Donner l'équation de la surface obtenue en faisant tourner la courbe $y = f(x)$ autour del'axe Ox.

Ex 68: *X 2017*
Deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

Ex 69: *X 2017*
Soit $f : [0, A] \to [0, A]$ telle que $f(x) = x - ax^\beta + \circ(x^\beta)$ au voisinage de 0 ($a > 0$ et $\beta > 1$). On se donne u_0 dans $[0, A]$ et on construit $(u_n)_{n\geq 0}$ par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$
1) Montrer que pour u_0 assez proche de 0 la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
2) Donner dans ce cas un équivalent de u_n.
3) Question de cours : convergence au sens de Cesàro.

Ex 70: *X 2017*
Soit D dans $L(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))$ qui conserve la positivité ($f \geq 0 \Rightarrow D(f) \geq 0$).
1) Montrer que D est continue si on munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme.
2) Montrer que $(D(fg))^2 \leq D(f^2)D(g^2)$.

Ex 71: *X 2017*
1) Soit V dans $\mathbb{R}^n$. Décrire $\{PV; P \in O_n(\mathbb{R})\}$.
2) (Posée en fin d'oral) Soit D diagonale telle que $\forall P \in O_n(\mathbb{R})\ PD = DP$. Que dire de D ? (note [4])

Ex 72: *CCMP 2017*
1) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives définies sur un intervalle I d'intérieur non vide. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur U et que pour tout x $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante. Montrer que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f_n$ converge uniformément sur I.
2) On pose $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Montrer que $u_n \sim n \ln 2$.

Ex 73: *CCMP 2017*
Tartarin de Tarascon va à la chasse avec $n-1$ de ses amis ($n \in \mathbb{N}^*$). Cependant, ils aiment bien les animaux et ne veulent pas les tuer. Ils prennent donc leur casquette (ils en ont chacun une et seule), la lancent et tirent dessus. Mais ils sont maladroits donc ils ont autant de chance de toucher les autres casquettes que la leur. Lors d'un tir chaque casquette est touchée une et une seule fois.
Calculer la probabilité qu'aucun chasseur n'ait touché sa casquette, puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$. (note [5])

COQUIN Claire

Ex 74: *ICNA 2017*
Soit
$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt.$$
1) Montrer que g est définie sur $D =]1,+\infty[$.
2) Montrer que g est dérivable sur D et calculer g'.
3) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
4) Déterminer g.

DUPREZ Guillaume

Ex 75: *CCMP 2017*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$
1) Domaine de définition de f et g. Montrer qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine. Ls comparer.
2) Limites de f aux bornes de son intervalle de définition ?

Ex 76: *CCMP 2017*
E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. f est dans $L(E)$, possédant une unique valeur propre λ. On suppose que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 2$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Ajouté par votre professeur : est-il nécessaire de supposer D diagonale, pour arriver à la même conclusion ?
5. L'examinateur à demandé une justification de la formule du crible, que l'étudiant a établi par récurrence.

Ex 77: *CCS 2017*
Soit $(G, .)$ un groupe fini de cardinal n. Soit $(\hat{G}, \times)$ le groupe des morphismes de $(G, .)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.
1) On suppose n premier.
   a) Montrer que G est cyclique.
   b) Montrer que $\hat{G}$ est de cardinal n (Vérifier d'abord que c'est un groupe).
2) Maintenant on suppose n quelconque, G est abélien. E désigne l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{C}$.
   a) E est-il un espace vectoriel ? Trouver sa dimension.
   b) Si pour a dans G on pose $\tau_a : f \mapsto f(\ldots + a)$, $a \in G$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle tous les τ_a sont diagonalisables.

Ex 78: *CCS 2017*
$(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
1)
   a) Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
   b) Calculer l'espérance et la variance de S_n^*.
   c) Montrer que $\mathbb{P}(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = I_n$
   d) A l'aide d'une simulation probabiliste conjecturer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$. Procéder de même en utilisant l'expression analytique de I_n.
   e) Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers une limte $\ell \in [0, 1[$.
2) La suite de l'énoncé a été perdue.

Ex 79: *ENS Cachan 2017*
$(u_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi u_k}$.
1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ lorque $u_k = \lambda^k$, $\lambda \in [-1, 1]$; puis $u_k = k\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
2) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que dire (rapidement) de la diagonalisabilité de A ?. On pose $u_k = \lambda^k$, où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Que dire de $\lim_{n\to+\infty} S_n$?
Indication : On montrera que si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A, alors, pour tout entier k $\lambda_1^k + \lambda_2^k$ est un entier.
3) Etendre le résultat précédent au cas où λ est l'unique racine de module strictement supérieur à 1 d'un polynôme unitaire à coefficients entiers rationnels, les autres étant de module strictement inférieur à 1.

Ex 80: *ENS Lyon 2017*
Soit G un groupe H un sous-groupe de G, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G telle que les g_nH soient tous distincts. On suppose qu'il existe des sous-groupes de G $(L_1, \ldots, L_p)$ tels que $G = H \cup L_1 \cup \cdots \cup L_p$. Montrer que $G = L_1 \cup \cdots \cup L_p$.
Indication : Montrer qu'il est suffisant de prouver que $\left(\bigcap L_i\right) - H \neq \emptyset$. Etudier les cas $p = 1$ et $p = 2$ en essayant de dégager un schéma de récurrence.

Ex 81: *ENS Cachan-Lyon-Paris 2017*
1) Existe-t-il une famille dénombrable de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ disjoints deux à deux ?
2) Existe-t-il une famille non dénombrable de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ disjoints deux à deux ?
3) Existe-t-il une famille non dénombrable de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ dont les intersections deux à deux sont finies ?

GARROUTY Matthieu

Ex 82: *CCS 2017*
Dans $\mathbb{R}[X]$ on note $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$.
1) Montrer que pour tout n il existe une unique famille $(s_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ telle que $X^n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} P_k$.
2) Déterminer $s_{n,0}$, $s_{n,1}$ et $s_{n,n}$.
3) Etablir la relation $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + k s_{n-1,k}$.

4) Ecrire en Python une fonction associant à n la liste $(s_{n,k})_{0\leq k\leq n}$.
5) Pour $n\geq 3$ on pose $d_n = \text{pgcd}(s_{n,2},\dots,s_{n,n-1})$. Etablir la liste des d_n pour $3\leq n\leq 30$. Faire une conjecture.
6) Calculer $s_{n,n-1}$. En déduire que d_n divise $n(n-1)$.
7) Montrer que d_n est premier avec k pour $2\leq k\leq n-1$.
8) Prouver $k!s_{n,k} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^n$.

Ex 83: *X 2017*
1) On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^{2^n}}}{1-x^{2^{2^n}}} \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^{2^n}}}{1+x^{2^{2^n}}}.$$

Montrer que ces objets sont définis si $|x|<1$. Touver une relation fonctionnelle entre f et g (Indication : considérer $f-g$).

On pose $F_n = 2^{2^n}+1$ et $A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{F_n}$.
2) Montrer qu'il existe (a_n,b_n) dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $0 < a_n f(\frac{1}{2}) + b_n = \circ(1)$. En déduire que $f(\frac{1}{2})$ est irrationnel, puis qu'il en est de même de A.

Ex 84: *X 2017*
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes. On pose $U=\min(X,Y)$, $V=X-Y$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X=u+v^+)\mathbb{P}(Y=u+v^-) = \mathbb{P}(U=u)\mathbb{P}(V=v).$$

Ex 85: *X 2017*
On note $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour x réel. On admet $\int_{\mathbb{R}}\gamma = 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, avec $\mathbb{P}(X_1=1)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$ (note [6]). On pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$.
Montrer que :

$$\forall P\in\mathbb{R}[X] \qquad \lim_{n\to+\infty}E(P(S_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\gamma(x)\,dx.$$

GAY Benoit

Ex 86: *ENS CLPR 2017*
On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N})}$ croissante de réels strictement positifs. On définit :

- $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0}|u_n|\text{cv}\right\}$ avec la norme : $N_E(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$
- $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0}|a_n.u_n|\text{cv}\right\}$ avec la norme : $N_F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n.u_n|$

1) Montrez que F est dense dans E.
2) Montrez que la boule unité de F : $\overline{B}_F(0,1)$ est compacte dans E (c'est-à-dire que de toute suite d'éléments de cette boule on peut extraire une suite qui converge dans E).
Indication : (Indication de l'examinateur) Mettre en place un procédé diagonal d'extraction.

Ex 87: *ENS Cachan-Rennes 2017*
On considère f la somme d'une série entière complexe $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ de rayon de convergence $R>0$.
1) Montrez que si $a_0\neq 0$:

$$\forall\epsilon>0, \exists z\in\overline{B}(0,\epsilon), |f(z)|>a_0$$

2) Montrez que :

$$\forall r>0, r<R \Rightarrow \sup_{|z|\leq r}|f(z)| = \sup_{|z|=r}|f(z)|$$

6. Une telle variable aléatoire, à valeurs dans $\{-1,1\}$ s'appelle une variable de Rademacher.

Ce résultat est-il vrai pour une variable réelle ?
3) Montrez que :

$$\forall r > 0, |f'(0)| \leq \frac{2}{r} \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

Ex 88: *X 2017*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante, de sorte que : $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ existe.
On définit aussi l'opérateur Δ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta u_n = u_n - u_{n+1}$$

1) Montrez que :

$$\forall p \geq 1, S = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{p-1} \frac{\Delta^n u_0}{2^n}\right) + \frac{1}{2^p}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \Delta^p u_k\right)$$

On pourra commencer par traiter le cas $p = 1$.
2) En déduire que si $u_n = f(n)$ où f est C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}, (-1)^k f^{(k)} \geq 0$ alors :

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n u_0}{2^n}\right)$$

3) Sans utiliser de théorème de permutation, montrez que :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Ex 89: *X 2017*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

- $u_0 \in \mathbb{R}$
- $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$

1) Etudiez la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
L'examinateur s'attendait à ce que je décrive une "carte" des convergences, c'est-à-dire quelles valeurs de u_0 permettaient d'avoir convergence.
2) Montrez que si $u_0 > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$u_n \sim_{n\to+\infty} 2e^{\alpha 2^n}.$$

Indications : Posez $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(\frac{u_n}{2})$ et étudiez la nature de la série $v_{n+1} - v_n$.

Ex 90: *CCMP 2017*
On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n dt$.
Déterminez le rayon de convergence, étudiez les points $x = 1$ et $x = -1$ et donnez la valeur de la somme. (*On peut soit calculer directement, et procéder à une interversion, soit calculer $a_{n+2} + a_n$ et sommer. Cette-dernière méthode étant un peu plus rapide et minimise les erreurs de calculs.*)

Ex 91: *CCMP 2017*
On note E l'espace vectoriel des suites réelles et on considère $T \in L(E)$ définit par :

$$\forall u \in E, T(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbf{N}, w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=n}^{n} u_i$$

Déterminez les valeurs propres et espaces propres de T.

Ex 92: *CCMP 2017*
1) Montrez que l'application : $N : M \mapsto \sqrt{\rho(M^TM)}$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice A définit une norme qui est égale à la norme subordonnée associée à la norme euclidienne.
2) Question oubliée.

KHALIL Iyes

Ex 93: *CCS 2017*
On définit

$$\psi : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \phi : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} \text{ si } t \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de ϕ sur $]-1,1[$.
2) Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3) En déduire que ϕ l'est aussi.
4) On pose $\xi : t \mapsto 1 - \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \phi(s)\,ds$ où $c = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)\,ds$. Tracer le grapphe de ξ à l'aide de Python.
5) Soit $\epsilon > 0$. Créer une fonction ξ_ϵ telle que

$$\begin{cases} \xi_\epsilon \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \forall t \ |t| \geq \epsilon \ \xi_\epsilon(t) = 0 \\ \forall t \ |t| \leq \frac{\epsilon}{2} \ \xi_\epsilon(t) = 1 \\ \forall t \ \xi_\epsilon(t) \in [0,1] \\ \xi_\epsilon \text{ est paire} \end{cases}$$

6) D'autres questions suivaient, le but étant put-être de prouver le théorème de Borel, qui affirme que pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels (ou de complexes) il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout n $f^{(n)}(0) = a_n$.

Ex 94: *CCS 2017*
1) Définition d'un hyperplan, caractérisation, dimension.
2) Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ une famille libre de formes linéaires sur E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et ϕ une forme linéaire. On voudrait montrer l'équivalence des proposition suivantes :
   a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \text{Ker } \phi_k \subset \text{Ker } \phi$,
   b) $\phi \in \text{Vect}\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$,
   c) $\exists c \ \forall x \in E \ |\phi(x)| \leq c \max_{1\leq k\leq p} |\phi_k(x)|$.
Quelles sont les implications évidentes ?
On définit :

$$\begin{array}{rccl} \theta & : & E & \to & \mathbb{C}^p \\ & & x & \mapsto & (\phi_1(x), \ldots, \phi_p(x)) \end{array}$$

Montrer que θ est surjective et en déduire $a) \Rightarrow b)$.

Ex 95: *CCMP 2017*
On définit , si $s > 1$:

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P} & : & \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \dfrac{1}{\zeta(s)} \displaystyle\sum_{k\in A} \frac{1}{k^s} \end{array}$$

1) Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité.
2) Soit $(p_1, \ldots, p_r)$ des nombres premiers distincts et $A_k = \{i; p_k|i\}$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   b) Montrer que les A_k sont mutuellement indépendants.
   c) En déduire $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

Ex 96: *CCMP 2017*
Que vaut

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}?$$

Ex 97: *CCMP 2017*
Si le 01/01/2017 est lundi, quel jour de la semaine tombe le 01/01/2018 ?

LAFOND Aymeric

Ex 98: *CCMP 2017*
1) Soit A une matrice de $M_{2p}(\mathbb{R})$, notée $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2p}$. On suppose $a_{i,j}=0$ si $i=j$, $a_{i,j}\in\{-1,1\}$ sinon. Montrer que A est inversible.
2) On considère un ensemble de $2p+1$ cailloux, on suppose que quel que soit le caillou que l'on mette de côté on peut partager les $2p$ autres cailloux en deux tas de p cailloux faisant le même poids. Montrer que tous les cailloux pèsent le même poids.

Ex 99: *CCMP 2017*
Déterminer tous les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall A\in M_n(\mathbb{R})\quad P(A)=0\Rightarrow \operatorname{tr}(A)=0.$$

Ex 100: *CCMP 2017*
1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$$

converge. On note ℓ sa limite.
2) Montrer que $u_n=\ell+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3) Oubliée.

LUDWIG Pierre-Alexandre

Ex 101: *CCS 2017*
On identifie $\mathbb{R}^4$ à $M_{4,1}(\mathbb{R})$. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.
1) Montrer graphiquement, en utilisant Python, que A possède 4 valeurs propres réelles distinctes. On les note λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4, dans l'ordre décroissant de leur valeur absolue.
2)
   a) Prouver l'existence d'une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_4)$ telle que pour tout i $Av_i=\lambda_i v_i$.
   b) Soit w dans $\mathbb{R}^4$, non orthogonal à v_1. On définit $(w_k)_{k\geq 0}$ par $w_0=w$ et $w_{k+1}=\dfrac{1}{\|Aw_k\|}Aw_k$. Vérifier que cette suite est bien définie.
   c) Montrer que $(w_{2k})_{k\geq 0}$ et $(w_{2k+1})_{k\geq 0}$ convergent et calculer leurs limites.
   d) Montrer que $((w_k|Aw_k))_{k\geq 0}$ converge et calculer sa limite.
3) On définit $A_1=A-\lambda_1 v_1{}^t v_1$.
   a) A_1 est-elle diagonalisable.
   b) Calculer les valeurs propres de A_1.
4) Il y avait d'autres questions. Peut-être l'itération du procédé pour calculer successivement toutes les valeurs propres de A.

Ex 102: *CCS 2017*
Soient r dans $\mathbb{R}^*$ et f une fonction rationnelle complexe n'ayant aucun pôle de module 1.
On note
$$N_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it}\, dt.$$
1) Calculer $F(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-a}\, dt$ en distinguant les cas $|a| > 1$ et $|a| < 1$.
2) Soit f et g deux fonctions rationnelles n'ayant aucun pôle de module r. Sous réserve d'existence, montrer :
$$N_f(fg) = N_r(f) + N_r(g).$$
3) Montrer que $N_r(f)$ est égal à la différence entre le nombre de zéros de f dans le disque $D(0, r)$, comptés avec leur multiplicité, et le nombre de pôles dans le même disque, comptés aussi avec leur multiplicité.
Indication : On pourra commencer par le cas où f est un polynôme de degré 1.
4) On suppose que $|z| = r \Rightarrow |f(z)| < 1$, calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{1+f(re^{it})} re^{it}\, dt$.
5) Il restait une question.

Ex 103: *CCMP 2017*
Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ possède un système fondamental de solution (f, g) où f est paire et g impaire si et seulement si a est impaire et b paire.

Ex 104: *CCMP 2017*
1) Soit D une matrice diagonale dans $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer qu'il existe X dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(X, DX, \dots, D^{n-1}X)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
2) Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe X dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(X, MX, \dots, ^{n-1}X)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Ex 105: *ENS Lyon 2017*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'ellipse d'aire minimale contenant K. Question intermédiaire calculer l'aire d'une ellipse. Rappel (précisé par l'examinateur) : l'équation d'une ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2=1}$ (note [7]).

Ex 106: *ENS CLPR 2017*
Soit p un nombre premier et $T = \{z \in \mathbb{C}^*; \exists n \in \mathbb{N}\ z^{p^n} = 1\}$. On admet que T est un groupe abélien, et que tout t de T il existe s danst T tel que $s^p = t$.
1) Soit ϕ un automorphisme de T, d'ordre q premier et tel que ϕ fixe les éléments d'ordre p. Montrer que $p = q$.
2) On suppose cette fois ϕ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, qui fixe les éléments d'ordre p^2. Montrer que $\phi = \mathrm{id}$.

Ex 107: *ENS Cachan 2017*
Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[-1, 1]$. On suppose de plus que $|x| \le \frac{1}{2} \Rightarrow \chi(x) = 1$. On définit $\phi : x \mapsto \chi(x) - \chi(2x)$ et pour tout entier $n \ge 1$ $\phi_n(x) = \phi(2^{-n}x)$.
1) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n = 1$ (on constate que pour cela il faut défininir judicieusement ϕ_0).
2) Si z est réel que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixz}e^{ix^3}\, dx$?
3) On définit $f_n(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixz}e^{ix^3}\phi_n(x)\, dx$, pour n entier. Montrer qu'il existe C tel que pour tout z et tout n $|f_n(z)| \le c(1 + |z|)2^{-n}$.
Que peut-on en déduire pour $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$?
4) Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$. Montrer que f est deux fois dérivable et que $f''(z) = \frac{z}{3} f(z)$.

7. Avec une telle restriction sur les ellipses le problème est simplifié, mais la question ne reste pas très claire. S'agit-il de prouver qu'une telle ellipse existe ?

Ex 108: *X 2017*
Soit $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \chi_M = \prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})\}$.
1) E est-il ouvert ? fermé ?
2) E est-il un sous-espace vectoriel.
3) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel contenu dans E ?
Indication : Penser aux matrices antisymétriques.

Ex 109: *X 2017*
1) Soit G un groupe. On note DG le sous-groupe de G engendré par les commutants de G ($[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$).
Soit N et H deux groupes et $i : N \to G$ et $s : H \to G$ deux morphismes de groupes, i injectif, s surjectif, vérifiant de plus $\mathrm{Im}\ i = \mathrm{Ker}\ s$. On dit que G est résoluble s'il existe un entier n tel que $D^nG = \{e\}$.
Montrer que G est résoluble si et seulement si N et H le sont.
2) Montrer que S_5 n'est pas résoluble.
Indication : Considérer $H = \{-1, 1\}$ $N = A_5$, $s = \epsilon$ (signature), $i = \mathrm{id}$.

MOREAU-PERNET Baptiste

Ex 110: *CCS 2017*
$M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ avec $m_{i,j} = \frac{1}{1+|i-j|}$, $M_i n M_n(\mathbb{R})$
1) Montrer que M est diagonalisable.
2)
  a) Ecrire en Python un fonction renvoyant $M(n)$. calculer ses valeurs propres pour $2 \le n \le 6$ et faire une conjecture sur le signe de ces valeurs propres.
  b) On pose $d_n(t) = \det(M(t))$ où $M(t) = (t^{|i-j|})_{1\le i,j\le n}$. Ecrire une fonction Python $d(n, t)$ calculant $d_n(t)$.
  c) — Tracer le graphe de d_n sur $[-1, 5; 1, 5]$ pour $2 \le n \le 6$.
     — En traçant le graphe de $t \mapsto \frac{\ln |d_n(t)|}{\ln t}$ sur $[2, 10]$ pour $2 \le n \le 6$, faire une conjecture sur le degré de d_n.
     — Faire une conjecture sur le coefficient dominant de d_n.
3) Calculer d_n (explicitement, sans Python).
4) Soit A et B deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP = B$. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{*+}.$$
5) Soit A symétrique réelle on pose $A_p = (a_{i,j})_{1\le i,j\le p}$, $1 \le p \le n$. On note $\Delta_p = \det(A_p)$ et on suppose qu'aucun des Δ_p n'est nul.
Montrer qu'il existe une unique T triangulaire supérieure dont les coefficient diagonaux sont égaux à 1 telle que
$${}^tTAT = \mathrm{diag}(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}).$$
6) Il restait une question, sûrement pour démontrer la conjecture sur le signe des valeurs propres de M.

Ex 111: *CCS 2017*
Soit I_n le nombre dinvolutions de $\{1, \ldots, n\}$.
1) Dénombrer les permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\ge0} \frac{I_n}{n!} x^n$ est au moins égal à 1.
2) Montrer que pour tout n : $I_{n+2} = I_{n+1} + (n + 1)I_n$.
3) Montre que $I_n = \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+2q=n}} \frac{n!}{p!q!2^q}$.

Ex 112: *CCMP 2017*
$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$
1) Donner le développement en série entière de f_α. On note R son rayon de convergence et pour x dans $]-R,R[$ $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2) En faisant un développement asymptotique de $\ln|a_{n+1}| - \ln|a_n|$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}$. En déduire la nature selon α de $\sum_{n\geq 0} a_n$.
3) Calculer pour $\alpha > -1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Indication : On pourra poser $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Ex 113: *CCMP 2017*
Soit A dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définitt :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_A & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & (AP)^{(n)} \end{array}$$

1) Montrer que Φ_A est bien définie.
2) Trouver les A de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lesquels Φ_A est bijective.
3) Trouver les A de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lesquels Φ_A est diagonalisable.

Ex 114: *X 2017*
Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Soit $E_p = p\left(\frac{|u_p|}{|u_{p+1}|} - 1\right)$. Soit $a_n = \inf_{p\geq n} E_p$ et $b_n = \sup_{p\geq n} E_p$.
1) On suppose $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante et tendant vers une limite $b_\infty < 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est divergente.
2) On suppose $(a_n)_{n\geq 0}$ croissante et tendant vers une limite $a_\infty > 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Ex 115: *X 2017*
On note $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ pour x réel. On admet $\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ (note [8]). On pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$.
Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \qquad \lim_{n\to+\infty} E(P(S_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\gamma(x)\,dx.$$

MAISON Lucas

Ex 116: *CCS 2017*
Les polynômes d'Euler.
1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $P(X) + P(X+1) = 2X^n$. On note E_n ce polynôme et $e_n = E_n(0)$.
2) Soit n dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une relation simple entre E_n' et E_{n-1}. En déduire

$$E_n(x) = n\int_0^x E_{n-1}(t)\,dt - \frac{n}{2}\int_0^1 E_{n-1}(t)\,dt.$$

3) A l'aide de Python.
   a) Ecrire une fonction calculant les $n+1$ premiers polynômes d'Euler.
   b) Calculer e_n pour n dans $[1,10]$. Que peut-on conjecturer ?
   c) Tracer le graphe des E_n sur $[0,1]$, pour $1 \leq n \leq 8$. Faire une conjecture sur le sens de variation des E_n
4) Montrer que E_n est à coefficients rationels.
5) Etablir que $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$. En déduire que e_n est nul si n est pair et non nul.
6) Il restait d'autres questions.

8. Une telle variable aléatoire, à valeurs dans $\{-1,1\}$ s'appelle une variable de Rademacher.

Ex 117: *CCS 2017*
1) Pour s dans $\mathbb{C}$ on pose $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$. Montrer que ζ est définie et continue sur $D=\{z\in\mathbb{C};\mathcal{R}\mathrm{e}(z)>1\}$.
2) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,+\infty[\to\mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall n\geq a\quad |f(n)-\int_n^{n+1}f(x)\,dx|\leq\frac{1}{2}\max_{t\in[n,n+1]}|f'(t)|.$$

3) Montrer que la fonction $s\mapsto\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $D'=\{z\in\mathbb{C};\mathcal{R}\mathrm{e}(z)>0\}$. Donner son développement asymptotique.
Indication : Poser $u_n(s)=\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx$ et montrer que $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge normalement sur $D(a,\epsilon)=\{z\in\mathbb{C};|z|\leq a\text{ et }\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\geq\epsilon\}$.

Ex 118: *ENS CLPR 2017*
Soit $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, convexe ne s'annulant qu'en 0.
1) Montrer que ϕ est continue.
2) On pose

$$(*)\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^{*+}}\frac{\phi(2x)}{\phi(x)}<+\infty$$

et

$$L^{\phi}(\mathbb{R})=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\text{ continues par morceaux};\phi(|f|)\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}\}.$$

Montrer que $L^{\phi}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si et seulement si $(*)$ est vérifiée.

Ex 119: *CCMP 2017*
Soit $\alpha>0$ et $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Ex 120: *CCMP 2017*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n, f et g deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)=n$ et $f+g=\mathrm{Id}_E$. Montrer que f et g sont des projecteurs.
Questions ajoutées. Le résultat similaire pour trois endomorphismes est-il valable ? Tout endomorphisme diagonalisable peut-il s'écrire comme combinaison linéaire de projecteurs ?

MARIE Théo

Ex 121: *CCS 2017*
On pose $\phi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ et pour $n\geq 1$ $\phi_n(t)=n\phi_1(nt)$.
1)
- Trace le graphe de ϕ_n pour $1\leq n\leq 5$.
- Limite de la suite$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

On pose $f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt$ et on suppose l'intégrale définie.
2)
- Avec $f(t)=|t|$, tracer le graphe de $f*\phi_n$ restreinte à $[-5,5]$ et $1\leq n\leq 5$.
- Exprimer simplement $f*\phi_n$ (comme une somme d'intégrale).

On définit une approximation de l'unité comme une suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*\ \psi_n\text{ est positive et intégrable,}\\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(t)\,dt=1,\\ \forall\epsilon>0\ \lim_{n\to+\infty}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi_n(t)\,dt=1.\end{cases}$$

3) Soit f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- Montrer qe $f*\psi_n$ est bien définie.
- Montrer que $f*\psi_n=\psi_n*f$.

4)

— Déterminer la limite simple de $f * \psi_n$.

— Si ψ_1 est une fonction continue positive, intégrable et d'intégrale égale à 1, alors la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $\psi_n(t) = n\psi_1(nt)$ est une approximation de l'unité.

5) Il restait une question. Peut-être l'application du résultat de la question précédente à la fonction f de la question 2.

Ex 122: *CCS 2017*

1) Si M est dans $M_n(\mathbb{R})$, exprimer le rang de $\mathrm{Com}(M)$ à l'aide de celui de M.

2) Si $\mathrm{rg}\,(M) = 1$ condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable. Si elle n'est pas diagonalisable, montrer que M est semblable à $E_{1,2}$.

Ex 123: *CCMP 2017*

Soit E un espace euclidien.

1) Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique.

2) Soit a dans $L(E)$. On veur montrer l'existence d'un endomorphisme b tel que $a\circ b$ et $b \circ a$ sont symétriques et $a \circ b \circ a = a$, $b \circ a \circ b = b$.

— Montrer que si b existe alors $a \circ b$ et $b \circ a$ sont des projecteurs orthogonaux.

— Montrer que $\tilde{a} : x \mapsto a(x)$ réalise un isomorphisme de $(\mathrm{Ker}\ a)^\perp$ sur $\mathrm{Im}\ a$. En déduire l'existence de b, en utilisant une décomposition sur $\mathrm{Im}\ a$ et $(\mathrm{Im}\ a)^\perp$.

3) Appliquer à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice donnée sans garantie) en explicitant B

Ex 124: *CCMP 2017*

1) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et étudier sa convergence.

2) Convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$?

3) Convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$? Valeur de la somme ?

4) Equivalent de u_n ?

Ex 125: *X 2017*

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux suites de réels ($n \in \mathbb{N}^*$). Etudier la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1}y_n \\ x_ny_1 & \ldots & x_ny_{n-1} & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}$$

Ex 126: *X 2017*

Soit α, β et γ les angles d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{8}{3 + 2\cos\beta}.$$

Ex 127: *X 2017*

On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ pour $x > 0$.

1) Montrer que ζ est définie et continue sur son domaine de définition

2) Même question pour f.

3) Trouver un équivalent de ζ en 1^-, la limite ℓ de ζ en $+\infty$ et un équivalent $\zeta - \ell$ en $+\infty$.

MARGIER Mathieu

Ex 128: *CCS 2017*

1) On pose
$$\phi_1 : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xz + 4xy + 4yz.$$

a) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, trouver S dans $S_3(\mathbb{R})$ telle que $\phi_1(x, y, z) = {}^tXSX$.

b) A l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de S, ainsi que leurs multiplicités.

c) Après en avoir justifier l'existence, déterminer le min et le max de ϕ_1 sur la sphère unité.

d) Déterminer les éventuels extrema de ϕ_1 sur $\mathbb{R}^3$.

2) On pose $f(x, y) = xe^y + ye^x$ et $\Sigma = \{(x, y, z); z = f(x, y)\}$.

a) A l'aide de Python représenter graphiquement Σ. En déduire une conjecture sur l'existence d'extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer le plan tangent à Σ en $(0, 0)$.

3) Il restait d'autres questions.

Ex 129: *CCS 2017*

1) Définition d'un hyperplan, caractérisation, dimension.

2) Soit $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ une famille libre de formes linéaires sur E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et ϕ une forme linéaire. On voudrait montrer l'équivalence des proposition suivantes :

a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \text{Ker } \phi_k \subset \text{Ker } \phi$,

b) $\phi \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$,

c) $\exists c\ \forall x \in E\ |\phi(x)| \leq c \max_{1 \leq k \leq p} |\phi_k(x)|$.

Quelles sont les implications évidentes ?

On définit :
$$\begin{array}{rccl} \theta & : & E & \to & \mathbb{C}^p \\ & & x & \mapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)) \end{array}$$

Montrer que θ est surjective et en déduire $a) \Rightarrow b)$.

3) Il restait encore une question.

Ex 130: *CCMP 2017*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que X^2 soit d'espérance finie. Montrer que
$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n + 1)\mathbb{P}(X > n).$$

Ex 131: *CCMP 2017*

1) Soient A, B dans $M_3(\mathbb{C})$ non nulles et telles que $A^2 = B^2 = 0$, alors elles sont semblables.

2) Le résultat est-il encore valable dans $M_4(\mathbb{C})$.

Ex 132: *ENS CLPR 2017*

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif). On suppose que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est fini ou dénombrable. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Indication : (Donnée) Commencer par le cas où $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est fini.

Ex 133: *ENS CLPR 2017*

On dit que le sous-groupe H du groupe G en est un sous-groupe propre si $H \neq G$. Soit G un groupe, H un sous-groupe propre de G. Existe-t-il un sous-groupe propre $\hat{H}$ de G, contenant H et maximal pour l'inclusion.

MICHELLAND Sébastien

Ex 134: *CCS 2017*
Etude des suites équiréparties.
Pour $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on pose
$$c_n(a,b) = \text{Card}\{k \in [1,n]; \{u_k\} \in [a,b]\},$$
où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
On dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si :
$$\forall (a,b)\ 0 \leq a \leq b \leq 1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n(a,b)}{n} = b - a.$$

1) Ecrire une fonction $c(u,n,a,b)$ et tracer $\frac{c_n(a,b)}{n}$, $1 \leq n \leq 500$, $[a,b] = [0,\frac{1}{2}]$
   a) Conjecturer pour $u_n = \sqrt{n}$.
   b) Conjecturer pour $u_n = \ln n$.
   c) Conjecturer pour $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Appuyer cette conjecture par un autre choix de $[a,b]$.
2) Cas de $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   a) Proposer une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $u_n + v_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n.
   b) Conclure sur l'équirépartition de $(u_n)_{n\geq 1}$.
3) Cas de $u_n = \sqrt{n}$. On choisit $0 \leq a \leq b < 1$, $n \geq 3$.
   a) Montrer qu'il existe k dans $[1,n]$ tel que :
$$\{\sqrt{k}\} \in [a,b] \Rightarrow \exists p \in [1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\ (p+a)^2 \leq k \leq (p+b)^2.$$
   b) En déduire que
$$c_n(a,b) \leq \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} (b^2 - a^2 + 1 + 2p(b-a)).$$
   c) Obtenir une minoration très proche, puis montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.
4) Il restait des questions.

Ex 135: *CCS 2017*
1) Si M est dans $M_2(\mathbb{Z})$, montrer que M est dans $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2) Soit G un sous groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que son ordre appartient à $\{1,2,3,4,6\}$.
3) Construire un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que G soit isomorphe à un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire.

Ex 136: *ENS CLPR 2017*
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi , et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On pose $S_0 = 0$ et $\forall k \geq 1\ S_k = \sum_{i=1}^k X_i$
On pose , pour $n \geq 0$, $I_n = \{S_0, \ldots, S_n\}$ et $K_n = \text{Card}\, I_n$.
1) Montrer que $\mathbb{P}(K_n = K_{n-1} + 1) = \mathbb{P}(S_1 \times \cdots \times S_n \neq 0)$.
2) Montrer que $(\mathbb{E}(\frac{K_n}{n}))_{n\geq 1}$ tend vers $\mathbb{P}(\forall k\ S_k \geq 0)$.
3) On donne la loi de X_1 : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p$. Calculer $\mathbb{E}(\frac{K_n}{n})$.

PONCET Jérémy

Ex 137: *CCS 2017*
Soit $(p_i)_{0\leq i\leq N}\in]0,1[^{N+1}$ tel que $\sum p_i = 1$.
On étudie l'évolution d'une population . On note Z_n le nombre de personnes portant le facteur x à la génération n ($Z_n \in [0, N^n]$).
Chaque personne possède la probabilité p_k d'avoir k descendants. On pose $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.
On pose $G(s) = \sum_{k=0}^{N} p_k s^k$, pour $s \geq 0$.
1) Montrer que G est continue, strictement croissante et convexe.
2) On pose $G_n(s) = \sum_{k=0}^{N^n} \mathbb{P}(Z_n = k)s^k$.
  a) Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G$.
  b) Montrer que $(q_n)_{n\geq 0}$ converge vers q vérifiant $G(q) = q$
3) Montrer que $q = 1$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{N} kp_k \leq 1$.
4) Il y avait probablement d'autres questions.

Ex 138: *CCMP 2017*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(ux)\frac{e^{-u}}{u}\,du$.
1) Domaine de définition D_f de f.
2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
3) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
4) En utilisant une autre méthode, classique, calculer f.

Ex 139: *CCMP 2017*
Soit a et B dans $M_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer qu'il existe M dans $M_2(\mathbb{C})$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$, tels que $A = P(M)$, $B = Q(M)$.
Qu'en est-il si on se place dans $\mathbb{R}$?

Ex 140: *X 2017*
$I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. w est une fonction continue positive sur I telle que $\int_a^b w(t)\,dt > 0$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on considère le produit scalaire

$$< f, g >= \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx \ (note\,^9).$$

On note $\mu_i = \int_a^b x^i w(x)\,dx$ et $G_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix}$ dans $Mn+1(\mathbb{R})$.
1) Montrer que G_n est dans S_n^{++}. On note $(P_0, \ldots, P_n)$ obtenue à partir de $(1, X, \ldots, X^n)$ par application du procédé de Gram-Schmidt.
Exprimer les P_i à partir des matrices G_i.

Ex 141: *X 2017*
Soit f convexe continue de $[a, b] \to \mathbb{R}$.
1) Montrer que

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

2) On suppose maintenant f de plus de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $m = \min_{[a,b]} f''$ et $M = \max_{[a,b]} f''$. Montrer que

$$m\frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M\frac{(b-a)^2}{24}.$$

9. Les produits scalaires sur les espaces vectoriels complexes ne sont plus au programme. Faire l'exercice en remplaçant $\mathbb{C}[X]$ par $\mathbb{R}[X]$ et le produit scalaire par

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

ce qui ne change absolument rien à l'exercice.

REMILI François

Ex 142: *X 2017*
On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a_0, \quad u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad u_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad u_3 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \text{etc}\ldots$$

1) Montrer que pour tout n $u_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Indication : Par récurrence en exprimant u_{n+1} comme un « u_n ».
2) Montrer que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
Indication : Considérer $y_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.
3) En notant $x = \lim_{n\to+\infty} u_n$ montrer que

$$|x - u_n| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

4) En déduire que x est irrationnel.

Ex 143: *X 2017*
1) Résoudre $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.
2) Que dire du cas général $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}$.
Indication : En posant $z(x) = y(e^x)$ se ramener à une équation à coefficients constants.
Question en fin d'oral : Quelle est la forme générale des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants ?

Ex 144: *CCMP 2017*
Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}\, dt$.

Ex 145: *CCMP 2017*
Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et u dans $S(E)$ (symétrique). On pose $f(x) = \|u(x)\|^2 - < u(x), x >$.
f est-elle majorée, minorée ? Si oui, donner une borne supérieure, inférieure.

Ex 146: *CCS 2017*
1) $S_i n S_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \{PSP^{-1}; P_i n O_n(\mathbb{R})\}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de S.
  a) Si $A \in \Omega$ montrer que $\forall k$ $a_{kk} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.
  b) Montrer que si ϕ est convexe :

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} \phi(a_{k,k}); A \in \Omega\right\} = \sum_{k=1}^{n} \phi(\lambda_k).$$

2) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si u est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E, on note $f(u)$ l'endomorphisme symétrique dont la matrice dans une base orthonormale diagonalisante de u est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les images par f des coefficients respectifs de la matrice de u. On suppose maintenant f convexe, et v et w symétriques. Montrer :

$$\forall t \in [0,1] \quad \operatorname{tr}(f((1-t)v + tw)) \leq (1-t)\operatorname{tr}(f(v)) + t\operatorname{tr}(f(w)).$$

Ex 147: *CCS 2017*
On pose $P_0 = 1$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$ pour $n \geq 1$. $S_{n,k}$ est le coefficient de X^{k-1} dans P_n.
1) Ecrire une fonction $S(n,k)$ renvoyant $S_{n,k}$.
2) Pour $k \in \{1,2,3,4\}$ afficher les 100 premières valeurs de $(S_{n,k})_{n\geq 0}$. Faire une conjecture $(*)$.
3) Montrer que $S_{n+1,k+1} = S_{n+1,k} + nS_{n,k+1}$
4) Prouver la conjecture $(*)$ de la question 2.
5) On pose $U_{n,k} = \frac{S_{n,k}}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$. Tracer le graphe des $(U_{n,k})_{1\leq n\leq 100}$ pour $k \in \{1,2,3,4\}$. Faire une conjecture $(**)$.
6) Cas particuliers.
  a) Montrer que $U_{n,2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de $U_{n,2}$.
  b) Montrer que $U_{n,3} = \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n-1} \frac{1}{ij}$. En déduire un équivalent de $U_{n,3}$.
7) Cas général. Etablir :

$$U_{n,k} \sim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Indication : Raisonner par récurrence.

ROUVEYROL Marc

Ex 148: *CCS 2017*
On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} x^k.$$

1)
  a) Domaine de définition, noté D, et étude de la continuité (sur le plus grand intervalle possible).
  b) Donner une majoration de l'erreur commise en approchant $f(x)$ par $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^4} (-1)^k \frac{\ln k}{k} x^k$, en supposant $x > 0$.
  c) Même question lorsque $x \in [\alpha, 0]$, $\alpha \in D \cap \mathbb{R}^-$.
  d) En déduire une approximation de f et tracer son graphe à l'aide de Python.
2) On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
  a) Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ en fonction de certains H_n et S_n.
  b) Montrer qu'il existe un γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + \circ(1)$.
  c) Donner un équivalent simple de S_n, noté $\phi(n)$.
  d) Tracer à l'aide de Python la suite $(S_n - \phi(n))$. Que peut-on conjecturer ?
3) Il restait encore une question, divisée en trois sous-questions. Probablement pour évaluer $f(1)$ à l'aide de γ, et prouver que f' possède une limite en 1^-, en considérant $(1+x)f'(x)$.

Ex 149: *CCS 2017*
Soit $(G,+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
1)
  — Si $G \neq \{0\}$, montrer l'existence de $\inf(G \cap]0,+\infty[)$.
  — Montrer que G est dense ou de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}+$.
2) Montrer que $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$, $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\frac{x}{y} \notin \mathbb{Q}$.
3) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.

Ex 150: *CCMP 2017*
1) Soit A une matrice de $M_{2p}(\mathbb{R})$, notée $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2p}$. On suppose $a_{i,j} = 0$ si $i = j$, $a_{i,j} \in \{_1, 1\}$ sinon. Montrer que A est inversible.
2) On considère un ensemble de $2p+1$ cailloux, on suppose que quel que soit le caillou que l'on mette de côté on peut partager les $2p$ autres cailloux en deux tas de p cailloux faisant le même poids. Montrer que tous les cailloux pèsent le même poids.

Ex 151: *CCMP 2017*
Déterminer tous les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad P(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}\,(A) = 0.$$

Ex 152: *CCMP 2017*
Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières

— $S_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$,
— $S_2(x) = \sum_{n\geq 0} a_n^2 x^n$,
— $S_3(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n^2}$,

THIEBAUD Luca

Ex 153: *CCMP 2017*
$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ pour f dans E.
1) Soit a et b dans $\mathbb{R}^+$ tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Montrer :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^{*+})^2 \quad \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

2) Montrer que pour tout couple (f,g) d'éléments de E, $f > 0$, $g > 0$, on a :

$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f+g)^2}.$$

3) Perdue !

Ex 154: *CCMP 2017*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs tels que p et q commutent.
1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2) Déterminer Ker $p \circ q$ et Im $p \circ q$.

Ex 155: *CCS 2017*
1) Soit θ un nombre complexe fixé. Posons

$$u_n(x) = \binom{\lfloor x \rfloor}{n} \left(\frac{\theta}{\lfloor x \rfloor}\right)^n \text{ si } x \geq n, u_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. En déduire

$$e^\theta = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^n.$$

2) Pour p et n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $Q_n(p) = \theta \times \prod_{k=1}^n (1 - v_k(p))$ où

$$v_k(p) = \frac{\theta}{4p^2(\tan(\frac{k\pi}{2p}))^2} \text{ si } k \leq p-1, v_k(p) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $|Q_{n+1}(p) - Q_n(p)| \leq \dfrac{1}{\pi(n+1)^2}$.

3) Non traitée, non regardée [10]

Ex 156: *CCS 2017*

Soit n un entier non nul. On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n (de $[1,n]$) . Si $\sigma(n) > 2n$ n est abondant, si $\sigma(n) = 2n$ n est parfait, si $\sigma(n) < n$ n est déficient.

1)

a) Programmer la fonction σ.

b) En déduire le plus petit entier impair abondant.

c) Le plus petit entier qui n'est pas le produit de deux entiers déficients.

2) Si n et m sont des entiers non nuls a-t-on $\sigma(nm) \geq n\sigma(m)$? Si n est divisible par un abondant alors il est abondant.

3) Est-il vrai que si n est divisible par un nombre parfait alors il est parfait ou abondant ?

4) Posons $u_k = 2^{k+2} \times 3^3 \times 5 \times 7$. On écrit $u_k = xy$ où x est pair, x et y déficients.

a) Montrer que 6 ne divise ni x ni y.

b) En déduire que 2^{k+2} divise x et 3^3 divise y.

5) Suite non traitée et oubliée.

TRIFA Youssef

Ex 157: *CCS 2017*

On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne. Pour u dans $\mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, on note $H_u = I_n - \frac{2}{{}^t uu} u {}^t u$.

1) Montrer que H_u est la matrice de la réflexion par rapport à $u^\perp$.

2) Soit r une réflexion. Montrer qu'il existe un u et une base orthonormale dans laquelle la matrice de r est H_u.

3) Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre un vecteur u et renvoie la matrice H_u associée.

4) soit v dans $\mathbb{R}^n$ non colinéaire à e_1, on pose $u = v - \|v\| e_1$. Montrer que $H_u(v) = \|v\| e_1$.

5) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe α dans $\mathbb{R}$, u dans $\mathbb{R}^n$ et B dans $M_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que

$$H_u A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

en prenant la convention $H_0 = I_n$.

6) Soit A dans $M_n\mathbb{R}$, montrer qu'il existe Q dans $O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

7) Montrer que $(\det A)^2 \leq \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j})^2$.

8) Ecrire en Python un programme qui à une matrice A associe la matrice R calculée précédemment (une matrice 4×4 était donnée, avec la réponse pour tester le programme).

Ex 158: *CCS 2017*

1) Enoncer le théorème de Schwarz (sur les dérivées partielles), avec ses hypothèses.

2) Soit f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dénombrer le nombre de dérivées partielles de f d'ordre k, en tenant compte du théorème de Schwarz [11].

3) Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Montrer que le maximum global de f sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ est atteint sur $S(0,1)$.

Indication : Poser $f_p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + f(x_1, \ldots, x_n)$.

10. Ce qui n'a pas empêché le candidat d'obtenir la note 19/20. Il y avait assez à faire avant.

11. Question de votre professeur, donner l'exemple d'une fonction pour laquelle ces dérivées sont effectivement toutes différentes.

Ex 159: *CCM 2017*
(Avec préparation au tableau) Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Ex 160: *CCM 2017*
1) Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a\sin^2 t} dt$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \tan t$.
2) Nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (n\pi)^2 \sin^2 t} dt$$

Questions supplémentaires : Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.
3) Il restait deux questions mais l'examinateur a changé d'exercice. Il s'agissait probablement d'étudier l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 \sin^2 t} dt \text{ puis de } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^\alpha \sin^2 t} dt.$$

Ex 161: *CCM 2017*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ existe. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, soit θ_0 dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1,\ \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\ \exists \rho > 0\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{z\to 1, z\in\Delta_{\theta_0}} = S.$

Indication : Utiliser la transformation d'Abel avec $a_n z^n = R_{n-1} - R_n$ où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$.

Ex 162: *CCM 2017*
(En fin d'épreuve) Quelle est la différentielle du déterminant ?

Ex 163: *ENS Lyon 2017*
Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Dénombrer le centralisateur de σ, c'est-à-dire l'ensemble des permutations qui commutent avec σ.

Ex 164: *ENS CLPR 2017*
Soit p un nombre premier et $T = \{z \in \mathbb{C}^*; \exists n \in \mathbb{N}\ z^{p^n} = 1\}$. On admet que T est un groupe abélien.
1) Soit ϕ un automorphisme de T, d'ordre q premier et tel que ϕ fixe les éléments d'ordre p. Montrer que $p = q$.
Indications :

- Poser x d'ordre minimal non fixé par ϕ
- Construire un élément y d'ordre p à partir de l'égalité $x^p = \phi(x)^p$
- Montrer que $y^q = 1$ en composant successivement par ϕ, à partir de la relation $y = \phi^{-1}(x)x$.
- En déduire $p = q$.

2) On suppose cette fois ϕ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, qui fixe les éléments d'ordre p^2. Montrer que l'étude pour n quelconque peut se ramener à l'étude pour n premier. Puis montrer que $\phi = \mathrm{id}$.

Ex 165: *ENS Paris 2017*
1) Soit $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ et $(c_1, \dots, c_n)$ dans $\mathbb{C}^n$. A quelle(s) condition(s) existe-t-il A, B et C dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\mathrm{Sp}(A) = (a_1, \dots, a_n)\ \mathrm{Sp}(B) = (b_1, \dots, b_n)\ \mathrm{Sp}(C) = (c_1, \dots, c_n) \text{ et } C = A + B?$$

Ex 166: *ENS Paris 2017*
(Posée en fin d'oral) Une fonction continue de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ vers $\mathbb{R}$ est-elle bornée ?

Ex 167: *X 2017*
Soit V_1, V_2,. . .,V_p des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{p} V_i$. Montrer qu'il existe un i tel que $V_i = \mathbb{R}^n$.

Ex 168: *X 2017*
Existe-t-il une fonction continue injective de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.

Ex 169: *X 2017*
1) Soit q de $M_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ telle que $q(M) = \mathrm{tr}\,({}^tMM)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel $q \leq 0$.
2) Même question avec $\tilde{q}(M) = \mathrm{tr}\,(M^2)$.

Ex 170: *X 2017*
On appelle état une matrice ρ de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive et telle que $\mathrm{tr}\,(\rho) = 1$. On note E l'ensemble des états de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Quels sont les projecteurs de E ?
2) On appelle état pur un projecteur de E. Soit ρ dans E. Montrer que ρ est un état pur si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\rho) = 1$.
3) Montrer que E est convexe.
4) On dit qu'un élément ρ de E est un point extrémal de E si et seulement si :

$$\forall \lambda \in]0,1[,\ \forall (\rho_1, \rho_2) \in (E - \{\rho\})^2 \quad \rho \neq \lambda \rho_1 + (1-\lambda)\rho_2.$$

Montrer que l'ensemble des points extremaux de E est l'ensemble des états purs.
5) (Question supplémentaire, il restait trois minutes.) Quels sont les états purs de $M_2(\mathbb{R})$?

VOUHE Jean-Phillipe

Ex 171: *CCMP 2017*
Soit E l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de carré intégrable. On pose $\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}$.
1) Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
2) Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' soit dans E. Montrer que f' est dans E avec

$$\|f'\|^2 \leq \|f\|\,\|f''\|.$$

Ex 172: *CCMP 2017*
Deux joueurs A et B jouent à pile ou face, n fois et de façon indépendante. On suppose que la pièce n'est pas truquée.
1) Montrer que si a et b sont des entiers

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k},$$

avec la convention usuelle $\binom{i}{j} = 0$ si $j < 0$ ou $j > i$.
2) Soit X la variable aléatoire comptant la différence (dans $\mathbb{Z}$) entre le nombre de pile de A et le nombre de pile de B. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Ex 173: *CCS 2017*
V est un espace euclidien. E et F deux sous-espaces supplémentaires de dimension d. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_d)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ des bases orthonormales de E et F.
1) Montrer qu'il existe une unique symétrie s telle que : $\forall i\ s(e_i) = f_i$.
2)
  a) Montrer qu'une symétrie de E est un endomorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.
  b) Montrer que s est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $A = ((f_j|e_i))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique.
3) On suppose qu'il existe $S \in S_d(\mathbb{R})$ et O dans $O_n(\mathbb{R})$ tels que $A = SO$. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale telle que $s(e_i) = f_i$. Le problème continuait ...

Ex 174: *CCS 2017*
1) Justifier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $x \mapsto \ln(\text{th}(x))$
2)
  a) A l'aide de Python, calculer $\int_0^{+\infty} \ln(\text{th}(x))\, dx$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (après en avoir justifié l'existence).
  b) Conjecture ? On admet que le résultat conjecturé est vrai.
3)
  a) Calculer (Python) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{sh}(2x)}\, dx$. Conjecture ?
  b) Prouver cette conjecture
4)
  a) Convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Calculer sa somme (Python).
  b) Calculer (Python) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{ch}(2x)}\, dx$. Conjecture ?
5) Démontrer la conjecture précédente.

Ex 175: *CCP 2017*
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k \text{ où } p \in]0,1[\text{ et } q = 1 - p.$$
Soit $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$
1) Quelle est la loi du couple (U, V).
2) Loi marginale de U.

On admet : $V(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4) U et V sont-elles indépendantes ?

Ex 176: *CCP 2017*
Soit
$$G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$
1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
2) Montrer G est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $G'(x)$.
3) Montrer que G est constante et calculer sa valeur.
4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
5) Soit $\phi_n : x \mapsto x^{2n+1} e^{-x^2}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} \phi_n(x)\, dx$. Montrer que I_n est définie puis calculer I_n.