X 2018 — Epreuve de remplacement — MP

Questions préliminaires

1) a) $\forall \lambda \in [0,1]$ $\forall (P,Q) \in A_N$

$$\begin{cases} - \forall x \in [0,1] \quad (\lambda P + (1-\lambda)Q)(x) \geq 0 \\ - (\lambda P + (1-\lambda)Q)(1) = (\lambda P + (1-\lambda)Q)(-1) = 1 \\ - \lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathbb{R}_N[X] \end{cases}$$

Donc $\lambda P + (1-\lambda) Q \in A_N$.

et A_N est convexe.

1) b) + $\|P\|_1$ est défini car $x \mapsto |P(x)|$ est continue sur $[0,1]$

+ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda P\|_1 = |\lambda| \|P\|_1$
+ $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_N[X]$ $\|P+Q\|_1 \leq \|P\|_1 + \|Q\|_1$.

$\}$ évident

+ Si $P \in \mathbb{R}_N[X]$ et $\|P\|_1 = 0$ alors
$x \mapsto |P(x)|$ est positive et continue sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle, donc $\forall x \in [-1,1]$ $P(x) = 0$
P possède une infinité de racines
Donc $P = 0$

1) c) $\mathbb{R}^+$ ~~$\setminus\{0\}$~~ est fermé dans $\mathbb{R}^*$, et $P \mapsto P(x)$ et linéaire donc continue de $\mathbb{R}_N[X]$ vers $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}_N$ est de dimension finie.

Donc $\underline{\mathcal{E}_x = \{P \in \mathbb{R}_N[X],\ P(x) \geq 0\}}$ est fermé dans $\mathbb{R}_N[X]$.

Pour la même raison $\underline{\mathcal{F}_x = \{P \in \mathbb{R}_N[X]\ P(x) = 1\}}$ est fermé.

Or $\underline{A_N = \left(\bigcap_{x \in [-1,1]} \mathcal{E}_x\right) \cap \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_{-1}}$.

Donc $\underline{A_N \text{ est fermé comme intersection de fermés}}$

2.a) On remarquera que si P est dans A_N alors
$L(P) = \|P\|_1$.
Il suffit donc de montrer que $\inf_{P\in A_N} \|P\|_1$ est atteint.

Soit $K = \{P \in A_N, \ \|P\|_1 \leq 2\} = \overline{B}(0,2) \cap A_N$.

K est fermé, non vide (il contient 1), et borné.
K est un compact non vide de $\mathbb{R}_N[X]$ (car $\mathbb{R}_N$ est de dimension finie) et $\| \ \|_1$ est continue (car 1-lipschitzienne).

Donc $\| \ \|_1$ atteint un minimum sur K, noté m.

$$\begin{cases} \forall P \in K \quad L(P) = \|P\|_1 \geqslant m = L(P_0) \\ \forall P \in A_N - K \quad L(P) > 2 \geqslant m. \end{cases}$$

Donc $\forall P \in A_N \quad L(P) \geqslant m$
et m est donc le minimum de L sur A_N et
$a_N = L(P_0)$ est atteint.

2.b) $B_N = \underbrace{K}_{\text{fermé borné}} \cap \underbrace{L^{-1}(a_N)}_{\text{fermé}}$ car L continue car linéaire. ($\mathbb{R}_N$ de dimension finie)

B_N est fermé et borné donc compact.
B_N est convexe car $\overline{B}(0,2)$, A_N et $L^{-1}(a_N)$ le sont et B_N est leur intersection.

2.c) Clairement si $a_N = L(P_0)$
et si $P_1 = P_0(-X)$ alors $a_N = L(P_1)$
(faire le changement de variable $y = -x$)
Soit $P_2 = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$ alors $P_2 \in B_N$ car B_N est convexe et P_2 est pair.

Première partie.

3.a) $(X^2-1)^j$ est de degré $2j$ donc P_j est de degré j

3b) La dérivée (d'une fonction / d'un polynôme) paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire) et $(X^2-1)^j$ est pair, donc, par récurrence $\frac{d^k}{dx^k}(X^2-1)^j$ est pair si k est pair, impair si k est impair.

En conclusion. P_j a même parité que j.

3c) En utilisant la formule de Leibniz et $(X^2-1)^j = (X-1)^j(X+1)^j$ on obtient :

$$P_j = \frac{1}{2^j j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} j\cdots(j-k+1)(X-1)^{j-k}\, j\cdot(j-1)\cdots(k+1)(X+1)^k$$

Par conséquent

$$P_j(1) = \frac{1}{2^j j!}\left(\sum_{k=0}^{j-1} 0 + \binom{j}{j} j!\, 2^j\right) = 1.$$

et de même $$P_j(-1) = \frac{1}{2^j j!}\left((-1)^j j!\, 2^j + 0\right) = (-1)^j$$

4) Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$ et j dans $[0,n]$

$$\langle P, P_j\rangle = \frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1} P(x)\frac{d^j}{dx^j}\left((x^2-1)^j\right)dx$$

Si $j \geq 1$

$$\langle P, P_j\rangle = \left[\frac{1}{2^j j!}P(x)\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(x^2-1)^j\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1}\frac{dP(x)}{dx}\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(x^2-1)^j\,dx.$$

Or 1 et -1 sont racines de $(X^2-1)^j$ à l'ordre j donc.

$$\left[\frac{1}{2^j j!}P(x)\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(x^2-1)^j\right]_{-1}^{1} = 0$$

et

$$\langle P, P_j\rangle = -\frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1}\frac{dP(x)}{dx}\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(x^2-1)\,dx.$$

De même, on obtient par récurrence sur k :

Si $0 \leq k \leq j$

$$\langle P, P_j \rangle = \frac{(-1)^k}{2^j j!} \int_{-1}^{1} \frac{d^k P(x)}{dx^k} \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} (x^2-1)^j \, dx.$$

En particulier si $i < j$, en prenant $k = j$

$$\langle P_i, P_j \rangle = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^j P_i}{dx^j}(x) \right) (x^2-1)^j \, dx$$

Or $\deg P_i = i < j$ donc $\frac{d^j P_i}{dx^j}(x) = 0$ et $\langle P_i, P_j \rangle = 0$

q.e.d

5a) D'après le résultat de la question précédente

$$\langle P_j, P_j \rangle = \int_{-1}^{1} P_j(x)^2 \, dx = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^j}{dx^j} P_j(x) \right) (x^2-1)^j \, dx$$

$$g_j = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^j j!} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} \left((x^2-1)^j \right) (x^2-1)^j \, dx$$

unitaire de degré $2j$

$$g_j = \frac{(-1)^j}{(2^j j!)^2} \int_{-1}^{1} (2j)! \, (x^2-1)^j \, dx$$

$$g_j = \frac{(2j)!}{(2^j . j!)^2} I_j$$

5b) Pour $j \geq 1$. $I_{j-1} - I_j = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{j-1} \left(1 - (1-x^2)\right) dx$

$$I_{j-1} - I_j = \int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2)^{j-1} \, dx.$$

D'autre part, en intégrant par par parties

$$I_j = \left[x(1-x^2)^j \right]_{-1}^{1} + 2j \int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2)^{j-1} \, dx = 2j \left(I_{j-1} - I_j \right)$$

On a donc $\boxed{\forall j \geq 1 \quad I_j = \frac{2j}{(2j+1)} I_{j-1}}$

Or $I_0 = 2$. , donc, pour $j \geq 1$

$$I_j = \frac{2j \; 2(j-1) \qquad 2\times 1}{(2j+1)(2j-1) \qquad (3)} \times 2$$

$$I_j = \frac{(2j \; 2(j-1) \qquad 2\times 1)^2}{(2j+1)!} \times 2.$$

$$\boxed{I_j = \frac{(2^j j!)^2}{(2j+1)!} \times 2}$$ et par conséquent

$$\boxed{g_j = \frac{2}{2j+1}.}$$

~~6 a) les $\{P_j\}$ ... sont échelonnés en degré~~

<u>6 a)</u> Les P_j, $0 \leq j \leq n$, sont échelonnés en degré, donc la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ <u>est libre</u>. Elle est de <u>cardinal $n+1$</u>, qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille est donc une <u>base de $\mathbb{R}_n[X]$</u>.

<u>6 b)</u> Soit $\tilde{\Pi}_n = \text{Vect}\{P_{2j}, \; 0 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$

et $\tilde{J}_n = \text{Vect}\{P_{2j+1}, \; 0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}\}$

D'après 6 a) $\underline{\tilde{\Pi}_n \oplus \tilde{J}_n = \mathbb{R}_n[X]}$

d'après 3 b) $\underline{\tilde{\Pi}_n \subset \Pi_n \qquad \tilde{J}_n \subset J_n}$.

Or $\Pi_n \oplus J_n = \mathbb{R}_n[X]$

Donc $\underline{\tilde{\Pi}_n = \Pi_n \quad \text{et} \quad \tilde{J}_n = J_n}$, et puisque les familles considérées sont libres, <u>ce sont des bases des espaces associés</u>.

Troisième Partie

12) R_N est pair donc le degré de R_N est pair.
Si $\deg R_N = 2p < 2n$, alors $X^2 R_N \in A_N \cap \Pi_N$
et $L(X^2 R_N) = \int_{-1}^{1} x^2 R_N(x)dx < L(R_N) = a_N$ ce qui est contradictoire.
Donc $\deg R_N = 2n$.

13) - R_N est scindé et toutes ses racines sont dans $[-1,1]$ de plus $|R_N(1)| = |R_N(-1)| = 1$, donc toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

Si l'une d'elles était d'ordre impair, R_N ne pourrait rester positif (au sens large) au voisinage de cette racine. Donc toutes les racines de R_N sont d'ordre pair, R_N est scindé donc il existe U_N tel que $R_N = (U_N(X))^2$.

- $R_N(1) = 1$, quitte à changer U_N en $-U_N$ on peut supposer $U_N(1) = 1$

$R_N(-1) = 1$ donc $(U_N(-1))^2 = 1$ soit $U_N(-1) = \pm 1$

- $R_N(X) = R_N(-X)$ donc $(U_N(X))^2 = (U_N(-X))^2$

soit $(U_N(X) - U_N(-X))(U_N(X) + U_N(-X)) = 0$

Or $\mathbb{R}_N[X]$ est intègre donc

soit $U_N(X) = U_N(-X)$

soit $U_N(X) = -U_N(-X)$

U_N est donc soit pair soit impair.

$\deg U_N = n$ donc U_N est de la parité de n

14a) $\|U_N\|_2^2 = \int_{-1}^{1} U_N^2(x)\,dx = L(R_N)$

Or $\forall P \in H_n$ $P(1) = 1 = P(-1)$ donc $(P(1))^2 = (P(-1))^2 = 1$

et $\forall x \in [-1,1]$ $(P(x))^2 \geq 0$

En conclusion $\forall P \in H_n$ $P^2 \in A_N$, donc

$$\forall P \in H_n \quad L(P^2) \geq a_N = \|U_N\|_2^2$$

$$\forall P \in H_n \quad L(P^2) = \|P\|_2^2 \geq \|U_N\|_2^2$$

L'égalité étant atteinte pour $P = U_N$.

14b) $\forall t \in \mathbb{R}$ $U_N + t(P_{2j} - P_{2k}) \in H_n$, donc

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\|U_N + t(P_{2j} - P_{2k})\|_2^2 \geq \|U_N\|_2^2$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\|U_N\|_2^2 + 2t\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle + t^2\|P_{2j} - P_{2k}\|_2^2 \geq \|U_N\|_2^2$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $t^2\|P_{2j} - P_{2k}\|_2^2 + 2t\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle \geq 0$

$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $t\|P_{2j} - P_{2k}\|_2^2 + 2\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle \geq 0$

En faisant tendre t vers 0 $\quad 2\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle \geq 0$

de même en faisant tendre t vers 0^- $\quad 2\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle \leq 0$

Par conséquent $\langle U_N, P_{2j} - P_{2k}\rangle = 0$

et $\forall k, j$ $\langle U_N, P_{2j}\rangle = \langle U_N, P_{2k}\rangle = \mu$.

14.c) Puisque $(P_{2j})_{0 \leq j \leq n}$ est une base orthogonale de Π_n.

$$U_N = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{\langle U_N, P_{2j}\rangle}{\langle P_{2j}, P_{2j}\rangle} P_{2j}$$

$$\boxed{U_N = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{\mu}{g_{2j}} P_{2j}}$$

En évaluant en 1 $\quad 1 = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{\mu}{g_{2j}}$ soit $\boxed{\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}}}$.

14 d) On a vu précédemment que

$$a_N = \|U_N\|_2^2 = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{\mu}{g_{2j}}\right)^2 \|P_{2j}\|_2^2$$

(car (P_j) est orthogonale)

$$a_N = \mu^2 \times \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}} = \left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}}\right)^{-1}.$$

15) Le travail fait dans la question précédente reste d'actualité. Il suffit de remplacer la base (P_{2j}) par la base $(P_{2j+1})_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}}$, on obtient

$$a_N = \left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} \frac{1}{g_{2j+1}}\right)^{-1}.$$

16) U_N est de degré n, donc si n est pair U_N est pair, si n est impair U_N est impair.

Si n est pair. $\underline{a_N = \left(\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{4j+1}{2}\right)^{-1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}}$

Si n est impair $\underline{a_N = \left(\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{4j+3}{2}\right)^{-1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}}$

17) $\mu = a_N$ donc. $R_N = U_N^2$

$$\underline{R_N = \left(a_N \sum_{j=0}^{n/2} \frac{4j+1}{2} P_{2j}\right)^2 = \frac{16}{(n+1)^2(n+2)^2}\left(\sum_{j=0}^{n/2} \frac{4j+1}{2} P_{2j}\right)^2}$$

ou

$$\underline{R_N = \frac{16}{(n+1)^2(n+2)^2}\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{4j+3}{2} P_{2j+1}\right)^2}$$

selon la parité de n.