Fonction d'une variable réelle – Convexité

Exercice 1:
1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiares.
2) Enoncer le théorème de Rolle.
3) Montrer que ce théorème peut être étendu à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

4) Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-x^2} \end{array}$$

Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x).$$

Préciser son degré et son coefficient dominant.
5) Montrer que P_n, $n \geq 1$, est scindé à racines simples.
   a) En utilisant le théorème de Rolle.
   b) En utilisant la relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}.
   c) (Pour les 5/2) En montrant que pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)P_n(t)e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)f^{(n)}(t)\,dt = 0$$

   et en appliquant ce résultat à $R = \prod_{\alpha\in Z}(X-\alpha)$, où Z est l'ensemble des racines de P_n d'ordre impair (si $Z = \emptyset$ on prend $R = 1$). On justifiera l'existence des intégrales.

Exercice 2: Soit f une fonction continue, de $\mathbb{R}$ vers $]\alpha, \beta[$, avec $\alpha > 0$.
1) Montrer qu'il existe $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \rho'(t)f(\rho(t)) = 1.$$

2) Quelle est l'image de ρ ?

Exercice 3: *Ecrit ENS ULCR* 2017
Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et périodique est uniformément continue.

Exercice 4: *Ecrit X* 2017
Soit $h : x \mapsto x\ln x$ si $x > 0$ et $h(0) = 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit $a > 0$.
1) Montrer que

$$\forall x \geq 0 \quad h(x) \geq (x-a)h'(a) + h(a).$$

2) Montrer que cette inégalité est stricte si $x \neq a$.

Exercice 5: Soit f une fonction continue de $[0,1]$ vers $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe une fonction continue et convexe $g : [0,1] \to [0,1]$ telle que :

$$g(0) = 0,\ g(1) = 1,\ \forall t \in [0,1]\ g(t) \leq f(t).$$

Exercice 6: *CCS* 2014
Soit $k > n$. $(A_0, \ldots, A_k)$ sont des points de $\mathbb{R}^n$. Si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ est une famille de réels positifs dont la somme est non nulle on désigne par G le barycentre des $(A_0, \ldots, A_k)$ affectés de ces poids.
1) Définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et du barycentre de points de $\mathbb{R}^n$.
2) Que dire de la famille $(\overrightarrow{GA_0}, \ldots, \overrightarrow{GA_{k-1}})$?
3) Soit $\Omega = \{t \in \mathbb{R} | \forall i \in [0, k-1]\ \alpha_i + t\lambda_i \geq 0\}$, où les α_i sont dans $\mathbb{R}^+$ et les λ_i dans $\mathbb{R}$ et non tous nuls. Montrer que Ω admet un maximum ou un minimum.
4) Soit G un barycentre à coefficients positifs des $(A_0, \ldots, A_k)$. Montrer que G est un barycentre (à coefficients positifs) de k de ces $k+1$ points.
5) Montrer que tout barycentre des $(A_0, \ldots, A_k)$ est un barycentre de $n+1$ d'entre eux.
6) En déduire que l'enveloppe convexe d'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est compacte.